Министерство образования Российской Федерации

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра теории функций и функционального анализа

Линейные операторы в примерах и задачах

Методические указания

Ярославль 2003

ББК В 151. 5я73
Р 47

Составитель Ф.И. Папоркова

Линейные операторы в примерах и задачах: Метод. указания / Сост. Ф.И. Папоркова; Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2003. 24.

Методические указания предназначены для студентов первого курса вечернего отделения физического факультета и ставят своей целью помочь студентам в приобретении и закреплении навыков самостоятельного решения задач по линейной алгебре, а также помочь им ознакомиться с имеющимися способами их решения.

Рецензент: кафедра теории функций и функционального анализа Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Линейные конечномерные пространства

Определение. Множество L элементов **x**, **y**, **z**,… любой природы называется линейным пространством над полем К, если выполнены следующие условия:

а) любым двум элементам $\mathbf{x}\in L$ и $\mathbf{y}\in L$ ставится в соответствие элемент $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in L$, называемый суммой элементов x и y;

в) любому элементу $\mathbf{x}\in L$ и любому действительному числу λ ставится в соответствие элемент $\lambda x\in L$, называемый произведением x на λ;

с) указанные операции подчинены следующим требованиям:

- $\mathbf{x}+\mathbf{y}=y+x$, где $\mathbf{x}\in L$, $\mathbf{y}\in L$ и далее,
- $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$,
- существует нулевой элемент 0 такой, что $\mathbf{x}+0=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in L$,
- для любого элемента x существует противоположный элемент (-x) такой, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=0$,
- $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (1 – единичный элемент поля К),
- $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)$, где α, $\beta\in K$ и далее,
- $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$,
- $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$.

Примеры.

1. Множество матриц $M_{2x2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $(a_{ij}\in K)$ с элементами из поля К.

Матрица однозначно определяется своими элементами $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in K$. Сумма матриц **A**+**B** и произведение λ**A** на число λ, $\lambda\in K$ являются матрицами, у которых элементы получаются сложением соответствующих элементов $a_{ij}+b_{ij}$ и умножением на λ элементов a_{ij}, т.е.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+в_{11} & a_{12}+в_{12} \\ a_{21}+в_{21} & a_{22}+в_{22} \end{pmatrix}\in M_{2x2} \qquad \lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}\in M_{2x2}$$

Легко проверяется справедливость всех аксиом 1 – 8. Итак, M_{2x2} – линейное пространство.

2. Множество многочленов степени $\leq n$ с коэффициентами из поля К $F_n[x]=\{f(x):f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,\ a_n\in K\}$. Сумма $f+g$ и произведение λf являются многочленами, коэффициенты которых получаются сложением соответствующих коэффициентов многочленов f и g и умножением на число λ коэффициентов многочлена f. Справедливость аксиом 1 – 8 также элементарно проверяется. Следовательно, $F_n[x]$ – линейное пространство.

3. Рассмотрим множество $R^n(C^n)$, элементами которого являются упорядоченные наборы из n чисел, действительных (или комплексных), т.е. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Сумма $\alpha+в$ двух элементов α и в и произведение $\lambda\alpha$ элемента α на число λ определяются равенствами

$\alpha+в=(\alpha_1+в_1,\ \alpha_2+в_2,\ldots,\alpha_n+в_n)$, $\lambda\alpha=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\ldots,\lambda\alpha_n)$.

Очевидная справедливость аксиом 1 – 8 показывает, что R^n (C^n) – линейное пространство (арифметическое n-мерное).

Заметим, что элементы произвольного линейного пространства принято называть векторами.

Определение. Линейной комбинацией конечной системы элементов α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_к$ пространства L называется сумма произведений этих элементов на произвольные числа из поля К, т.е. выражение вида $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_к\alpha_к$. Совокупность всевозможных линейных комбинаций этих элементов называют их линейной оболочкой и обозначают $Lin(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$.

Определение. Конечная система элементов $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ линейного пространства L называется линейно независимой, если линейная комбинация $a\alpha_1+\beta\alpha_2+\ldots+\gamma\alpha_k$ является нулевым элементом пространства L, т.е. $a\alpha_1+\beta\alpha_2+\ldots+\gamma\alpha_k=0$ лишь при условии $\alpha=\beta=\ldots=\gamma=0$. Если же среди чисел $\alpha,\beta,\ldots\gamma$ хотя бы одно окажется отличным от нуля, то говорят, что система элементов $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ является линейно зависимой.

Определение. Конечная система элементов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\mathbf{e}_n$ линейного пространства L называется базисом L, если:

1) элементы $e_1,e_2,\ldots e_n$ – линейно независимы;

2) любой элемент $x\in L$ представим в виде их линейной комбинации $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n$.

Коэффициенты x_1, $x_2,\ldots,x_n$ разложения произвольного элемента $\mathbf{x}\in L$ по базису определяются единственным образом. Эти коэффициенты называются координатами $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$. Число элементов базиса определяет размерность пространства L и обозначается dimL. Линейные пространства называются конечномерными, если обладают конечной размерностью.

Примеры.

1. Размерность арифметического пространства R^n (C^n) равна n. Среди базисов выделяют канонический

$$\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0),$$
$$\mathbf{e}_2=(0,1,\ldots,0),$$
$$\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1).$$

Координатами вектора $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в этом базисе являются числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

2. Система матриц $\mathbf{A_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A_2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A_3}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и $\mathbf{A_4}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ образует базис в пространстве M_{2x2}. Этот базис также можно назвать каноническим. Для матрицы $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ координатами в этом базисе служат числа a,b,c,d, а $\dim M_{2x2}=4$.

3. Система многочленов $1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n$ представляет базис в пространстве $F_n[x]$, значит $\dim F_n[x]=n+1$.

Для многочлена $f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_nx^n$ в этом каноническом базисе координатами служат коэффициенты многочлена $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

В настоящих методических указаниях рассматриваются только конечномерные пространства, но дадим

определение. Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

Определение. Пусть L – линейное пространство, N – некоторое его подмножество, удовлетворяющее требованиям, что для всех $\mathbf{x}\in N$, $\mathbf{y}\in N$ и $\lambda\in K$ имеет место $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in N$ и $\lambda\mathbf{x}\in N$, тогда N называется линейным подпространством.

Примеры.

1. Линейная оболочка произвольных элементов $\mathbf{x},\mathbf{y},\ldots,\mathbf{z}$ линейного пространства L $\mathrm{Lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y},\ldots,\mathbf{z})$ является подпространством.

2. Рассмотрим подмножество $N\subset R^5$, состоящее из всех векторов $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_5)$, для которых $x_1+x_3+x_5=0$, т.е. векторы подмножества N имеют, например, вид $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,-x_1-x_3)$ и раскладываются по базису, элементами которого являются векторы:

$$\mathbf{v}_1=(1,0,0,0,-1),$$
$$\mathbf{v}_2=(0,1,0,0,0),$$
$$\mathbf{v}_3=(0,0,1,0,-1),$$
$$\mathbf{v}_4=(0,0,0,1,0).$$

Следовательно, N является подпространством размерности 4. Однако множество M векторов $\mathbf{x}\in R^5$, для которых выполняется равенство $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$, подпространством не является, так как для $\mathbf{x}\in M$ и $\mathbf{y}\in M$ имеем, что $\mathbf{x}+\mathbf{y}\notin M$.

3. Рассмотрим подмножество F многочленов степени ≤ 3, удовлетворяющих условию $f(0)-f(1)=0$. Это условие равносильно соотношению $\alpha_0-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$ или $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$. Таким образом, F состоит из многочленов вида $f(x)= \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x^3=\alpha_0+\alpha_1(x-x^3)+ \alpha_2(x^2-x^3)$. Отсюда имеем, что F является подпространством размерности 3 с базисом, состоящим из многочленов вида $p_1=1$, $p_2=x-x^3$, $p_3=x^2-x^3$.

Линейные операторы

Пусть V, L – два действительных конечномерных линейных пространства, заданных над одним и тем же полем К. Отображение $A:V\to L$, составляющее каждому элементу $\mathbf{x}$ пространства V по некоторому правилу элемент $A\mathbf{x}$ пространства L, называется оператором A, действующим из V в L.

Определение. Оператор A, действующий из V в L, называется л и н е й н ы м, если для любых элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ пространства V и всех $\alpha\in K$ выполняются соотношения: $A(\mathbf{x}+\mathbf{z})=A\mathbf{x}+A\mathbf{z}$ и $A(\alpha\mathbf{x})=\alpha A\mathbf{x}$.

Для всякого линейного оператора A следует, что $A(0)=0$. Если $A\mathbf{x}=0$ только при $\mathbf{x}=0$, то оператор называется невырожденным. Если же существует такой элемент $\mathbf{x}\neq 0$, что $A\mathbf{x}=0$, то A является вырожденным оператором.

Будем рассматривать только тот случай, когда V=L. Линейный оператор, действующий в этом случае из V в V, называют также линейным преобразованием пространства V.

Линейное преобразование называется тождественным, если оно преобразует любой элемент $\mathbf{x}$ в себя, и обозначается через E, т.е. $E\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Примеры.

1. Пусть $Ax=\lambda x$. Этот оператор является линейным. Действительно, имеем $A(\mathbf{x}+\mathbf{z})=\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{z})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{z}=A\mathbf{x}+A\mathbf{z}$ и $A(\alpha\mathbf{x})=\lambda(\alpha\mathbf{x})=\alpha(\lambda\mathbf{x})=\alpha A\mathbf{x}$.

2. Пусть $A:V\to V$, $\mathbf{a}$ – фиксированный ненулевой элемент пространства V и $A\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{a}$. Данное преобразование не является линейным, поскольку $A(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{a}$, $A\mathbf{z}=\mathbf{z}+\mathbf{a}$ и $A\mathbf{x}+A\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{z}+2\mathbf{a}$, в то время как $A(\mathbf{x}+\mathbf{z})=\mathbf{x}+\mathbf{z}+\mathbf{a}$.
Следовательно, $A(\mathbf{x}+\mathbf{z})\neq A\mathbf{x}+A\mathbf{z}$.

Матрица линейного оператора

Выберем в пространстве V базис $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$.
Тогда, если $\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n$ и для $A:V\to V$

$Ax=\xi_1\mathbf{v}_1+\xi_2\mathbf{v}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{v}_n$, то, в силу линейности оператора A имеем (*)

$A\mathbf{x}=A(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n)=x_1A\mathbf{v}_1+x_2A\mathbf{v}_2+\ldots+x_nA\mathbf{v}_n$.

Поскольку $A\mathbf{v}_i$, (i=1, 2…, n), – это тоже векторы из V, то их можно также разложить по базису $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$.

Пусть $A\mathbf{v}_1=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$,

$A\mathbf{v}_2=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n$,

. . . .

$A\mathbf{v}_n=\Upsilon_1\mathbf{v}_1+\Upsilon_2\mathbf{v}_2+\ldots+\Upsilon_n\mathbf{v}_n$. Тогда

$A\mathbf{x}=x_1A\mathbf{v}_1+x_2A\mathbf{v}_2+\ldots+x_nA\mathbf{v}_n=x_1(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n)+x_2(\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\ldots\beta_n\mathbf{v}_n)+\ldots$

$+x_n(\Upsilon_1\mathbf{v}_1+\Upsilon_2\mathbf{v}_2+\ldots+\Upsilon_n\mathbf{v}_n)=(x_1\alpha_1+x_2\beta_2+\ldots+x_n\Upsilon_n)\mathbf{v}_1+$

$+(x_1\alpha_1+x_2\beta_2+\ldots+x_n\Upsilon_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(x_1\alpha_n+x_2\beta_n+\ldots+x_n\Upsilon_n)\mathbf{v}_n$.

Итак, учитывая(*), получим равенство:

$(x_1\alpha_1+x_2\beta_1+\ldots+x_n\Upsilon_1)\mathbf{v}_1+(x_2\alpha_2+x_2\beta_2+..+x_n\Upsilon_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(x_1\alpha_n+x_2\beta_n+\ldots+x_n\Upsilon_n)\mathbf{v}_n=$

$=\xi_1\mathbf{v}_1+\xi_2\mathbf{v}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{v}_n$.

Отсюда, ввиду единственности разложения вектора по базису, следуют следующие равенства:

$$\begin{cases}\alpha_1x_1+\beta_1x_2+\ldots+\Upsilon_1x_n=\xi_1\\ \alpha_2x_1+\beta_2x_2+\ldots+\Upsilon_2x_n=\xi_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_nx_1+\beta_nx_2+\ldots+\Upsilon_nx_n=\xi_n\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\ldots\Upsilon_1\\ \alpha_2\beta_2\ldots\Upsilon_2\\ \ldots\ldots\\ \alpha_n\beta_n\ldots\Upsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \ldots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

Таким образом, линейному оператору A в данном базисе отвечает матрица, столбцами которой служат координаты образов базисных векторов $A\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_n$ в том же базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$.

Определение. Матрица $\mathbf{A}=(\alpha_{1j})\in M_n$, j – столбец которой состоит из координат вектора $A\mathbf{v}_j$ в базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$, называется матрицей линейного оператора $A:V\to V$ в базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$. Это означает, что для j=1,…,n $A(\mathbf{v}_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\mathbf{v}_i$.

Для нахождения коэффициентов разложения образов базисных векторов $A(\mathbf{v}_j)$ в произвольном базисе (а не каноническом) необходимо решать системы линейных уравнений.

Примеры.

1. Рассмотрим оператор $A:R^3 \to R^3$, действующий на вектор $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$ по правилу $A\mathbf{x}=\{x_1-2x_2+3x_3,\ 4x_1-5x_2+6x_3,\ x_1+x_3\}$.

Возьмем в качестве базиса векторы $\mathbf{v}_1=\{1,0,1\}$, $\mathbf{v}_2=\{1,1,1\}$, $\mathbf{v}_3=\{0,0,1\}$.

Образы базисных векторов в результате действия оператора имеют вид $A\mathbf{v}_1=\{4, 4, 0\}$, $A\mathbf{v}_2=\{3, 6, 0\}$, $A\mathbf{v}_3=\{3, -1, -1\}$.

Найдем коэффициенты разложения этих векторов по заданному базису:

$$A\mathbf{v}_1=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3, \qquad (1)$$

$$A\mathbf{v}_2=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\beta_3\mathbf{v}_3, \qquad (2)$$

$$A\mathbf{v}_3=\Upsilon_1\mathbf{v}_1+\Upsilon_2\mathbf{v}_2+\Upsilon_3\mathbf{v}_3. \qquad (3)$$

Уравнение (1) в координатной форме задает следующую систему:

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1+a_2=4\\ a_2=4\\ a_1+a_2+a_3=0\end{cases}$$

Расширенные матрицы всех трех систем уравнений, соответствующих этим трем уравнениям (1), (2) и (3), в совмещенном виде могут быть записаны следующим образом:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

Выполнив элементарные преобразования, приведем левую часть этой расширенной матрицы к единичной, что позволит получить в правой части матрицу оператора A в данном базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

Итак, $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & -4\end{array}\right)$ и $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4\\ 4 & 6 & -1\\ -4 & -3 & -4\end{pmatrix}$

Если рассматривать этот оператор в каноническом базисе $\mathbf{e}_1=\{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_3=\{0, 0, 1\}$, то в качестве образов базисных векторов будем иметь $A\mathbf{e}_1=\{1, 4, 1\}$, $A\mathbf{e}_2=\{-2, -5, 0\}$, $A\mathbf{e}_3=\{3, 6, 1\}$. Известно, что коэффициенты разложения любого вектора по каноническому базису совпадают с его координатами, значит, матицу этого оператора в каноническом базисе записываем так: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Рассмотрим плоскость V_2 с каноническим базисом $\mathbf{e}_1=\{1,0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,1\}$ и оператор поворота A_α всех векторов этой плоскости на угол α против часовой стрелки. Это преобразование линейно, поскольку результат не зависит от того, в какой последовательности выполнять операции: сначала повернуть векторы, а затем сложить, или сначала сложить, а потом повернуть эту сумму векторов. То же верно и для операции умножения вектора на число.

Чтобы написать матрицу оператора поворота A_α, необходимо найти координаты векторов $A\mathbf{e}_1$ и $A\mathbf{e}_2$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Так как единичный вектор $A\mathbf{e}_1$ образует угол α с вектором $\mathbf{e}_1$, имеем: $A\mathbf{e}_1=\{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ или $A\mathbf{e}_1=\cos\alpha e_1+\sin\alpha e_2$. Единичный вектор $A\mathbf{e}_2$ образует угол α с вектором $\mathbf{e}_2$, следовательно:

$A\mathbf{e}_2=\{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$, или $A\mathbf{e}_2=-\sin\alpha e_1+\cos\alpha e_2$.

Таким образом, матрица оператора поворота на угол α имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

3. Рассмотрим трехмерное пространство V_3 с каноническим базисом $\mathbf{e}_1=\{1,0,0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,1,0\}$, $\mathbf{e}_3\{0,0,1\}$ и оператор поворота на угол α любого вектора вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_3$.

Имеем $A\mathbf{e}_1=\cos ae_1+\sin ae_2+0e_3$,

$A\mathbf{e}_2=-\sin ae_1+\cos ae_2+0e_3$,

$A\mathbf{e}_3=0e_1+0e_2+1e_3$.

Поэтому матрица оператора поворота принимает вид $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

В этом же пространстве рассмотрим оператор ортогонального проектирования любого вектора на ось с направляющим вектором $\mathbf{e}_3$. Легко проверить линейность этого преобразования и ясно, что $A\mathbf{e}_1=0$, $A\mathbf{e}_2=0$, $A\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3=0\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+1\mathbf{e}_3$. Следовательно: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4. Тождественный оператор E, определяемый равенством $E\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in V$, будет иметь матрицу вида

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & ....0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & ....0\\ \multicolumn{5}{c}{..............................}\\ 0 & \multicolumn{3}{c}{...........0} & ....1\end{pmatrix}$$

в любом базисе, так как $E\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_k$, где $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ – произвольный базис пр-ва V.

5. В пространстве $F_n[t]=\{\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_n t^n\}$ многочленов от t степени не выше n рассмотрим оператор дифференцирования $Дf(t)=f^1(t)$. Основные правила дифференциального исчисления обеспечивают его линейность. Вычислим матрицу этого оператора в двух различных базисах.

В качестве первого базиса выберем векторы $\mathbf{v}_0=1$, $\mathbf{v}_1=t$, $\mathbf{v}_2=t^2$, …, $\mathbf{v}_n=t^n$. Поскольку $Д(t^k)=kt^{k-1}=01+0t+\ldots+0t^{k-2}+kt^{k-1}+0t^k+\ldots+0t^n$,

то $Д(\mathbf{v}_k)=\{0, 0, 0,\ldots,0, k, 0,\ldots 0\}=k\mathbf{v}_{k-1}$ и матрица оператора запишется так

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & ....0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & ....0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ....0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ....n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ....0\end{pmatrix}.$$

Выбрав в качестве другого базиса векторы $\mathbf{u}_0=1$, $\mathbf{u}_1=\frac{t}{1!}$, $\mathbf{u}_2=\frac{t^2}{2!}, \ldots$, $\mathbf{u}_n=\frac{t^n}{n!}$,

получим матрицу $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \end{pmatrix}$, так как $\left(\frac{t^k}{k!}\right)^1=\frac{1}{k!} \quad kt^{k-1}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$, т.е.

Д($\mathbf{u}_k$)=$\mathbf{u}_{k-1}=0\mathbf{u}_0+\ldots+0\mathbf{u}_{k-2}+1\mathbf{u}_{k-1}+0\mathbf{u}_k+\ldots+0\mathbf{u}_n$.

Если линейный оператор A:V$\to$V имеет в базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ матрицу $\mathbf{A}=(\alpha ij)$, то образ A$\mathbf{x}$ произвольного вектора $\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\ldots x_n\mathbf{v}_n$ будет иметь координаты $y_1,y_2,\ldots,y_n$ в том же базисе, вычисляемые по формуле

$y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}xj$, i=1,…,n, или в матричной записи: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Например, для линейного оператора A:$V_3\to V_3$, действующего в пространстве V_3 с базисом $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ и матрицей $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

в том же базисе, вектор $\mathbf{x}=4\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+5\mathbf{v}_3$ преобразуется в вектор A$\mathbf{x}$, координаты которого в этом же базисе находятся так:

A$\mathbf{x}$=$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 52 \\ 16 \end{pmatrix}$, т.е. A$\mathbf{x}=-3\mathbf{v}_1+52\mathbf{v}_2+16\mathbf{v}_3$ или A$\mathbf{x}$={-3, 52, 16}.

Итак, отметим, что при фиксированном базисе матрица линейного оператора полностью определяет этот оператор, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из L в L и матрицами порядка n x n.

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть линейный оператор A, действующий в пространстве V с базисом $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$, имеет матрицу $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$, а в базисе $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_n$ – другую матрицу $\mathbf{B}=(b_{ij})$. Найдем, как связаны между собой матрицы **A** и **B**.

Обозначим через $\mathbf{C}=(c_{ik})$ матрицу перехода от базиса $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ к базису $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_n$. Тогда $\mathbf{f}_i=c_{1i}\mathbf{v}_1+c_{2i}\mathbf{v}_2+\ldots+c_{ni}\mathbf{v}_n$, где $i=1,2,\ldots,n$.

Будем матрицу **C** рассматривать как матрицу линейного оператора G в базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$. Тогда $G\mathbf{v}_i= c_{1i}\mathbf{v}_1+c_{2i}\mathbf{v}_2+\ldots+c_{ni}\mathbf{v}_n = \mathbf{f}_i$
и, значит, линейный оператор G переводит векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ соответственно в векторы $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_n$. Определитель матрицы **C** отличен от нуля. Это значит, что для G существует обратный оператор G^{-1} такой, что $G^{-1}\mathbf{f}_1=\mathbf{v}_1$, $G^{-1}\mathbf{f}_2=\mathbf{v}_2$, $G^{-1}\mathbf{f}_n=\mathbf{v}_n$.
По условию имеем $A\mathbf{f}_i=b_{1i}\mathbf{f}_1+b_{2i}\mathbf{f}_2+\ldots+b_{ni}\mathbf{f}_n$.
Применим к обеим частям этого равенства оператор G^{-1} и получим

$$G^{-1}A\mathbf{f}_i=b_{1i}\mathbf{v}_1+b_{2i}\mathbf{v}_2+\ldots+b_{ni}\mathbf{v}_n.$$

Подставив в левую часть предыдущего равенства $f_i=Gv_i$, будем иметь

$$G^{-1}AG\mathbf{v}_i=b_{1i}\mathbf{v}_1+b_{2i}\mathbf{v}_2+\ldots+b_{ni}\mathbf{e}_n.$$

Иначе говоря, матрицей оператора $G^{-1}AG$ в базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ является матрица **B**. Но с другой стороны, матрица этого оператора равна произведению матриц операторов G^{-1}, A и G в базисе $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots\mathbf{v}_n$, т.е.

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \text{или} \quad \mathbf{A}_{\{fi\}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{\{Vi\}}\mathbf{C}.$$

Отсюда, в частности, следует, что определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса:

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}| = |\mathbf{C}^{-1}|\ |\mathbf{A}|\ |\mathbf{C}| = |\mathbf{C}|^{-1}\ |\mathbf{A}|\ |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|.$$

Примеры.

1. В базисе $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ преобразование A имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Написать матрицу **B** этого преобразования в базисе $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{w}_2=2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$. Матрица перехода от старого базиса $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ к новому базису $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ в данном случае,

очевидно, имеет вид $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, а обратная к ней $\mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & 21\\ 10 & 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19 & -29\\ 16 & 25\end{pmatrix}$$

2. В базисе $\mathbf{v}_1=\{1,\ -2\}$, $\mathbf{v}_2=\{-1,\ 3\}$ преобразование A имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6-2\\ 2-1\end{pmatrix}$. Написать матрицу этого преобразования в базисе $\mathbf{w}_1=\{1,\ 2\}$, $\mathbf{w}_2=\{2,3\}$.

Найдем матрицу перехода от базиса $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ к базису $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$. Для этого надо решить системы линейных уравнений, следующих из векторных уравнений

$$\mathbf{w}_1=a\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2 \qquad \text{и} \qquad \mathbf{w}_2=\lambda\mathbf{v}_1+\mu\mathbf{v}_2,$$

или $\alpha\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ и $\lambda\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$.

Расширенные матрицы этих двух систем, совмещая, можно записать так:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c}1 & -1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c|c}1 & 0 & 5 & 9\\ 0 & 1 & 4 & 7\end{array}\right)$$

Выполнив преобразования метода Гаусса, справа в полученной расширенной матрице будем иметь искомую матрицу перехода C, т.е.

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 4 & 7\end{pmatrix}, \qquad \text{для которой} \qquad \mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -11/3\\ -1 & 4/3\end{pmatrix}$$

Следовательно, $\mathbf{A}_{\{Wi\}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{\{Vi\}}\mathbf{C}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{\{Vi\}}\mathbf{C}=$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 9\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 9\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 9\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}22 & 40\\ 6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-100 & -181\\ 58 & 105\end{pmatrix}$$

Ядро и образ, ранг и дефект линейного оператора

Определение. Пусть A – линейный оператор, действующий в пространстве V. Совокупность всевозможных векторов вида A**x**, где $\mathbf{x}\in V$, называется областью значений оператора A, или образом пространства V при преобразовании A (обозначение – ImA), а множество всевозможных векторов **x**, для которых A**x**=0, - ядром оператора A (обозначение - Ker A).

Область значений и ядро линейного оператора A являются подпространствами в пространстве V.

Размерность области значений оператора A совпадает с рангом матрицы **A** и называется рангом оператора. Действительно, образ пространства V порождается векторами $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2,\ldots,A\mathbf{v}_n$, $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$

где $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ – любой базис пространства V, и значит его размерность равна максимальному числу линейно независимых векторов в системе $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$, или максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы **A**, т.е. – рангу матрицы **A**. Размерность ядра называется дефектом линейного оператора A.

Теорема. Сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности n пространства V, т.е. dim (ImA)+dim (Ker A)=n.

Если A – линейный оператор из V в V и dimV=n, то предположив, что dimKer A=к, $0 \le к \le n$, и $v_1,v_2,\ldots,v_k$ – базис ядра оператора A, можно построить базис образа оператора (ImA), состоящего из n-k векторов, следующим образом.

Пусть $\mathbf{v}_{k+1},\mathbf{v}_{k+2},\ldots,\mathbf{v}_n$ – система из n-k векторов, дополняющих $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_к$ до базиса V, тогда векторы $A\mathbf{v}_{k+1},\ldots,A\mathbf{v}_n$ представляют базис образа ImA.

Действительно, так как $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$, а $A\mathbf{x}=A(\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\alpha_1A\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_kA\mathbf{v}_k+\alpha_{k+1}A\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_nA\mathbf{v}_n=$
$=\alpha_{k+1}A\mathbf{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_nA\mathbf{v}_n$.

Итак, $A\mathbf{x}=\alpha A\mathbf{v}_{k+1}+\beta A\mathbf{v}_{k+2}+\ldots.+\Upsilon A\mathbf{v}_n$.

Это и означает, что векторы $A\mathbf{v}_{k+1},\ldots,A\mathbf{v}_n$ образуют базис ImA.

Примеры.

1. Линейное преобразование $A:R^3 \to R^3$ имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти базис и размерность ядра и образа оператора A.

Ядро оператора A состоит из таких $\mathbf{x} \in R^3$, для которых $A\mathbf{x}=0$, где $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, x_2\}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решением этой системы служит подпространство векторов вида $x=\lambda(2,-3,1)$ т.е. dim Ker A=1, а базисный вектор ядра - $v_1=(2, -3, 1)$. Поскольку dim(ImA)=n-dim(Ker A), то dim ImA=2. Теперь в качестве базиса R^3 необходимо взять два произвольных вектора, добавив к ним базисный вектор ядра оператора A.

Итак, $\mathbf{v}_1=\{2, -3, 1\}$, $\mathbf{v}_2=\{1, 0, 0\}$, $\mathbf{v}_3=\{1, 1, 0\}$.

Ранг этой системы векторов равен 3, следовательно, это базис R^3.

Тогда для любого $\mathbf{x} \in R^3$, имеем $A\mathbf{x}=A(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3)=$
$=x_1A\mathbf{v}_1+x_2A\mathbf{v}_2+x_3A\mathbf{v}_3=x_2A\mathbf{v}_2+x_3A\mathbf{v}_3$, т.к. $Av_1=0$

Это означает, что базисом образа оператора A служат векторы

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. Если же оператор A, заданный в R^3, действует по формуле

АИ=$\{x_1-x_2+x_3, x_1+x_3, x_1-2x_2\}$, то решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

представляет собой ядро оператора A.

В данном случае Ker A состоит из одного нулевого вектора. Следовательно, в качестве базиса ImA можно взять любой набор трех линейно независимых векторов из R^3.

Действия над линейными операторами

Пусть A и B – два линейных оператора, действующих в векторном пространстве V с фиксированным базисом $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$, α - элемент поля K.

Тогда суммой A+B называется оператор C, определяемый равенством $C\mathbf{x}=A\mathbf{x}+B\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in V$, произведением A на α называется оператор αA, определяемый следующим образом: $(\alpha A)\mathbf{x}=\alpha(A\mathbf{x})$ для каждого $\mathbf{x}\in V$.

Произведением AB операторов A и B называется оператор C, определяемый следующим образом: $C\mathbf{x}=A(B\mathbf{x})$ для каждого $\mathbf{x}\in V$.

Ясно, что операторы, получаемые в результате перечисленных операций, также являются линейными операторами, а их матрицы связаны с матрицами **A** и **B** операторов A и B в том же базисе следующим образом:

матрицей оператора AB является **A** **B**,

матрицей оператора A+B является **A**+**B**,

матрицей оператора αA является α**A**.

Следует отметить, что произведение линейных операторов, вообще говоря, некоммутативно.

Для каждого невырожденного линейного оператора A существует такой обратный к A линейный оператор A^{-1}, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Соответственно для каждой матрицы A, определитель которой отличен от нуля, существует такая обратная к A матица A^{-1}, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Заметим, что не всякий линейный оператор A из V в V обладает обратным.

Инвариантные подпространства.
Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Пусть W – подпространство векторного пространства V и A – линейный оператор, действующий в V.

Определение. Пространство W называется инвариантным подпространством оператора A, если для каждого x, принадлежащего W, элемент Ax также принадлежит W.

Тривиальные линейные подпространства {0} и все V инвариантны для любого линейного оператора $A:V\to V$. Ker A и ImA – также инвариантные подпространства.

Примеры.

1. Для оператора ортогонального проектирования P на ось Oz, заданного в евклидовом трехмерном пространстве, инвариантным подпростанством является множество векторов оси Oz.

2. Пусть оператор $A:V\to V$ имеет в базисе $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}$ матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & A_3\end{pmatrix}$$

Тогда подпространства $V_1=\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)$, $V_2=\mathrm{lin}(\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$ и $V_3=\mathrm{lin}(\mathbf{v}_5,\mathbf{v}_6)$ инвариантны относительно оператора A.

Поскольку $A\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2\in V_1$, $A\mathbf{v}_2=-2\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2\in V_1$, то образ любого вектора $\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2$ из V_1

$A\mathbf{x}=A(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2)=x_1A\mathbf{v}_1+x_2A\mathbf{v}_2=x_1(\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2)+x_2(-2\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2)=(x_1-2x_2)\mathbf{v}_1+ +(3x_1+4x_2)\mathbf{v}_2$

очевидно принадлежит V_1. Аналогично, для $\mathbf{x}\in V_2$ $A\mathbf{x}\in V_2$ для $\mathbf{x}\in V_3$ также $A\mathbf{x}\in V_3$.

Поэтому V представляется в виде прямой суммы трех инвариантных подпространств $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$, а матрица оператора A имеет клеточную форму.

Важное значение имеют одномерные инвариантные подпространства.

Пусть $A:V\to V$, V_1 – одномерное инвариантное подпространство пространства V для оператора A. Если $\mathbf{x}\in V_1$, где $\mathbf{x}\neq 0$, то $A\mathbf{x}\in V_1$. Тогда для некоторого $\lambda\in K$ $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ в силу одномерности V_1.

Определение. Отличный от нуля вектор **x** называется с о б с т в е н н ы м в е к т о р о м линейного оператора A, если существует такое число $\lambda\in K$, что $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. Это λ называется с о б с т в е н н ы м з н а ч е н и е м оператора A, соответствующим вектору **x**.

Нахождение инвариантных одномерных подпространств и нахождение собственных векторов оператора – задачи равносильные. Действительно, пусть некоторое одномерное подпространство V_1 инвариантно относительно A. Выберем в V_1 произвольный ненулевой вектор **u**. Поскольку V_1 одномерно, то все векторы из V_1 имеют вид $\lambda\mathbf{u}$, где $\lambda\in K$. По условию $A\mathbf{u}\in V_1$ и, следовательно, $A\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$, т.е. u – собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ. Обратно, пусть u – ненулевой собственный вектор оператора A и λ - соответствующее ему собственное значение. Рассмотрим одномерное подпространство V_1, натянутое на вектор u, т.е. множество всех векторов вида $\beta\mathbf{u}$. Равенства $A(\beta\mathbf{u})=\beta(A\mathbf{u})=\beta(\lambda\mathbf{u})=(\beta\lambda)\mathbf{u}$ показывают, что V_1 инвариантно относительно оператора A и все остальные векторы V_1 также являются собственными векторами, соответствующими собственному значению λ.

Если совокупность всех собственных векторов оператора A, соответствующих собственному значению λ, пополнить нулевым вектором, то получим линейное подпространство P_λ, называемое собственным подпространством оператора A, соответствующее собственному значению λ.

Размерность p_λ=dim P_λ называют геометрической кратностью собственного значения λ.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – различные собственные значения оператора А и пусть $P_{\lambda 1},\ldots,P_{\lambda m}$ – соответствующие им собственные подпространства.

Теорема. Сумма $P=P_{\lambda 1}+\ldots+P_{\lambda m}$ этих подпространств является прямой, т.е. для $\mathbf{u}_1\in P_{\lambda 1},\ldots,\mathbf{u}_m\in P_{\lambda m}$ равенство $\mathbf{u}_1+\ldots+\mathbf{u}_m=0$ возможно лишь при $\mathbf{u}_1=\ldots=\mathbf{u}_m=0$.

Ясно, что базис в P является объединением базисов подпространств $P_{\lambda 1},\ldots,P_{\lambda m}$ и, значит, $\dim P=p_{\lambda 1}+\ldots+p_{\lambda m}$.

Выберем в пространстве V базис $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ и пусть $\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n$, а матрица оператора А в этом базисе $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$. Чтобы найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора надо решить уравнение $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ или $(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)\mathbf{e}_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)\mathbf{e}_2+\ldots+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n)\mathbf{e}_n=$ $=\lambda(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n)$.

Отсюда, ввиду единственности разложения вектора $A\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$, получим:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{n}x_n=\lambda x_n, \end{cases}$$

что приводит к однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda)x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{n}x_n=0 \\ \alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda)x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{41}x_1+\alpha_{42}x_2+\ldots+(\alpha_{4n}-\lambda)x_n=0. \end{cases}$$

Для существования ненулевого решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\mathrm{P_A}(\lambda)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=|A-\lambda E|=0\,.$$

Этот определитель является многочленом степени n от λ. И он не зависит от выбора базиса $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$, в котором записывается матрица оператора А.

Действительно,

$|\mathbf{A}_{\{vi\}}-\lambda\mathbf{E}|=|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{\{Ui\}}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{E}|=|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{\{Ui\}}\mathbf{C}-\mathbf{C}^{-1}\lambda\mathbf{E}\mathbf{C}|=|\mathbf{C}^{-1}||\mathbf{A}_{\{Ui\}}-\lambda\mathbf{E}||\mathbf{C}|=|\mathbf{A}_{\{Ui\}}-\lambda\mathbf{E}|$.

Определение. Определитель матрицы А-λЕ называется характеристическим многочленом оператора А, т.е. $P_A(\lambda)=|A-\lambda E|$.

Теорема. Число $\lambda\in$К является собственным значением оператора А тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического многочлена $P_A(\lambda)$.

Характеристический многочлен может и не иметь вещественных корней, но в комплексном линейном пространстве всякий линейный оператор имеет хотя бы одно собственное значение, так как характеристический многочлен имеет хотя бы один комплексный корень в силу основной теоремы алгебры многочленов.

Определение: Кратность собственного значения λ как корня характеристического многочлена называется его алгебраической кратностью и обозначается α_λ. Заметим, что алгебраическая кратность α_λ собственного значения λ не меньше его геометрической кратности g_λ, т.е. $1 \le g_\lambda \le \alpha_\lambda \le n$.

Имеет место важная

Теорема. Если для любого корня $\lambda\in$К характеристического многочлена Р(λ) его алгебраическая кратность α_λ равна геометрической кратности g_λ, то тогда и только тогда оператор А диагонализируем.

Определение. Оператор А: V$\to$V называется диагонализируемым (или оператором простой структуры), если в V существует базис, в котором его матрица является диагональной.

Пример. Пусть матрица линейного оператора из R^2 в R^2 имеет вид $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{e}_1=\{1,\ 0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,\ 1\}$. Характеристический многочлен этого оператора

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$$

имеет два корня, т.е. данный оператор имеет два собственных значения $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$. Чтобы найти собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_1=-1$, необходимо решить уравнение $A\mathbf{x}=-\mathbf{x}$ или $(A+E)\mathbf{x}=0$. Это уравнение в координатной форме имеет вид $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$, что соответствует системе линейных уравнений $\begin{cases}2x_1+2x_2=0\\ 3x_1+3x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2\in R\end{cases}$

Итак, решением данной системы линейных уравнений является совокупность векторов вида $\mathbf{x}=\{-x_2,x_2\}=x_2\{-1,1\}$ или $\mathbf{x}=\alpha\{-1,\ 1\}$.

Иными словами, в качестве собственного вектора оператора A, отвечающего собственному значению $\lambda=-1$, можно взять вектор $\mathbf{v}=\{-1,1\}$ (или любой вектор, кратный ему, например, $\mathbf{w}=\{-5;5\}$).

Совокупность этих собственных векторов образует собственное подпространство $P_{-1}=\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \alpha\{-1;1\}\}$, для которого $\dim P_{-1}=1$.

Получили, что $\alpha_{-1}=g_{-1}=1$, т.е. геометрическая и алгебраическая кратности собственного значения $\lambda=-1$ совпали.

Аналогично имеем для $\lambda=4$:

$P_4=\{\mathbf{x} : \mathbf{x} =\beta\{2;\ 3\}\}$; $\dim P_4=1$, $\alpha_4=g\lambda=1$, $\mathbf{x}=\beta\{2,\ 3\}$.

Таким образом, в базисе $\mathbf{u}_1=\{-1;\ 1\}$, $\mathbf{u}_2=\{2;\ 3\}$ матрица оператора имеет вид $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ в силу совпадения кратностей (алгебраической и геометрической) для каждого собственного значения. Кроме того пространство R^2 можно разложить в прямую сумму собственных подпространств $R^2=P_{-1}\oplus P_4$.

Можно также проверить верность равенства $\mathbf{A}_{\{ui\}}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{\{ei\}}\mathbf{C}$.

В данном случае матрица перехода от базиса e_1,e_2 к базису u_1, u_2 имеет вид $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, а $\mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Произведение матриц

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 8\\ -1 & 12\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

действительно дает матрицу оператора в новом базисе.

Линейные операторы в примерах и задачах

Составитель: Папоркова Флорида Идыфатовна.

Редактор, корректор А.А. Антонова.

Компьютерная верскта Ф.И. Папоркова

Подписано в печать 02.06.2003 г. Формат 60x84/16

Бумага тип. Усл. печ. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,0

Тираж 150 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен

в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

150000, Ярославль, ул. Советская, 14.