

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова

**С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов**

Локальные методы анализа  
динамических систем

*Учебное пособие*

*Рекомендовано*

*Научно-методическим советом университета  
для студентов специальностей Математика и  
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2006

УДК 517.925+517.928

ББК В162я73

Г 52

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2006 года*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Н.Х. Розов;  
кафедра математики физического факультета Московского  
государственного университета им. М.В. Ломоносова

**Глызин, С.Д.** Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов;

Г 52 Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 92 с.

ISBN 5-8397-0509-8 (978-5-8397-0509-8)

Изложена теория нормальных форм в приложении к динамическим системам с конечномерным и бесконечномерным фазовым пространством. Приводится эффективный алгоритм вычисления коэффициентов нормальной формы.

Учебное пособие по дисциплине „Численные методы анализа динамических систем“ (блок ДС) предназначено студентам специальностей 010100 Математика и 010200 Прикладная математика и информатика очной формы обучения.

Рис. 21. Библиогр.: 32 назв. Табл. 4

УДК 517.925+517.928

ББК В161.61.я73

ISBN 5-8397-0509-8  
(978-5-8397-0509-8)

© Ярославский  
государственный университет  
им. П.Г. Демидова, 2006  
© Глызин С.Д.,  
Колесов А.Ю., 2006

# Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>1 Алгоритмы нормализации систем ОДУ</b>	<b>7</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	7
1.2 Нормализация Пуанкаре-Дюлака . . . . .	7
1.3 Теорема о центральном многообразии . . . . .	10
1.4 Описание основного алгоритма . . . . .	11
1.5 Структура нормальной формы в простейших случаях . . . . .	14
1.5.1 Транскритическая и виллообразная бифуркации . . . . .	15
1.5.2 Бифуркация Андронова-Хопфа . . . . .	17
1.5.3 Обзор бифуркаций коразмерности два . . . . .	22
1.6 Резонанс 1:1 . . . . .	28
1.6.1 Динамические свойства нормальной формы . . . . .	29
1.6.2 Обоснование некоторых результатов . . . . .	35
1.7 Резонанс 1:2 . . . . .	39
1.7.1 Нормальная форма в случае малости квадратичной нелинейности . . . . .	40
1.7.2 Нормальная форма в случае, если квадратичная нелинейность зависит от $\sqrt{\varepsilon}$ . . . . .	42
1.7.3 Нормальная форма в случае произвольной квадратичной нелинейности . . . . .	43
<b>2 Алгоритмы нормализации отображений</b>	<b>45</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	45
2.2 Нормализация отображений . . . . .	45
2.3 Отображение, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов . . . . .	47
2.3.1 Постановка задачи . . . . .	47
2.3.2 Нормальная форма отображения . . . . .	47

---

2.3.3	Динамические свойства нормальной формы отображения . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Нормализация дифференциально-разностных уравнений</b>	<b>59</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	59
3.2	Алгоритмы построения нормальной формы дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	60
3.2.1	Описание основного алгоритма . . . . .	60
3.3	Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона . . . . .	65
3.3.1	Постановка задачи . . . . .	65
3.3.2	Локальный анализ . . . . .	66
3.4	Резонанс 1:2 в уравнении второго порядка с периодически возмущенным запаздыванием . . . . .	76
	<b>Литература</b> . . . . .	<b>86</b>
	<b>Приложение</b> . . . . .	<b>89</b>

# Введение

В конце 19 – начале 20 века А. Пуанкаре поставил задачу качественного анализа дифференциальных уравнений. Успехи современных математических теорий, касающихся исследования поведения нелинейных динамических систем, так или иначе связаны с решением именно этой задачи.

В ряду инструментов, разработанных для качественного анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений, важное место занимает метод нормальных форм. Идея метода была высказана Пуанкаре в его диссертации и состояла в нахождении такого класса автономных динамических систем, которые можно было бы с помощью специальных замен свести к линейным. На этом пути было введено понятие резонансности собственных чисел матрицы линейной части системы и доказано, что в случае отсутствия таких резонансов сведение возможно. Позднее Дюлак выполнил обобщение этого результата на резонансный случай и показал, что в этой ситуации простейшим видом преобразованной системы является выражение, содержащее в правой части, наряду с линейными слагаемыми, еще и не уничтожаемые заменами резонансные члены. Такую систему называют нормальной формой, и ее построение позволяет успешно проанализировать локальную динамику изучаемой системы.

Однако по-настоящему действенным метод нормальных форм стал после работ, принадлежащих Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову и Ю.А. Митропольскому [1–3], в которых разрабатывались асимптотические методы нелинейных колебаний. Нормализация динамической системы на устойчивом интегральном многообразии позволяет выделить систему малой размерности, отвечающую за локальные свойства исходной системы. В настоящее время методу нормальных форм посвящено большое число различных исследований, сошлемся здесь лишь на самые, на наш взгляд, заметные, вышедшие в последние годы [4–11].

Сказанное делает актуальной разработку по возможности более экономного алгоритма построения нормальной формы. Заметим, что наиболее интересные выводы о качественном поведении получаются при изменении

параметров динамической системы в окрестности критических значений, в этом случае величина надкритичности служит естественным малым параметром, по которому удобно строить асимптотические формулы устойчивых решений изучаемой задачи. В то же время нормальная форма строится именно при критических значениях параметров, поэтому впоследствии возникает задача такого масштабирования возмущенной нормальной формы, чтобы полученная система могла быть удобно проанализирована, например, численными методами.

В пособии предлагается алгоритм, в ходе выполнения которого укороченная нормальная форма возникает из условий разрешимости для одного из очередных слагаемых нормирующей замены, при этом она уже оказывается подходящим образом масштабированной по входящим переменным.

# Глава 1

## Алгоритмы нормализации систем ОДУ

### 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим модельную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x) \equiv (A_0 + \varepsilon A_1)x + F_2(x, x) + F_3(x, x, x) + \dots, \quad (1.1)$$

в которой матрица  $A_0$  имеет  $m$  чисто мнимых собственных значений  $\pm i\omega_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , вектор  $x$  принадлежит пространству  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр, а  $F_2(x, x)$  и  $F_3(x, x, x)$  — линейные по каждому своему аргументу слагаемые. Отметим очевидное неравенство  $2m \leq n$ .

Наша задача состоит в описании качественного поведения системы (1.1) в некоторой окрестности нулевого решения.

### 1.2 Нормализация Пуанкаре-Дюлака

Согласно [12], рассмотрим формальный векторный степенной ряд  $F(x) = A_0x + \dots$  от  $n$  переменных с комплексными коэффициентами. Предположим, что собственные числа матрицы  $A_0$  различны. Введем понятие резонанса.

**Определение 1.** Набор собственных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  называется резонансным, если между собственными значениями существует целочисленное соотношение вида

$$\lambda_s = (m, \lambda), \quad (1.2)$$

где  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $m_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^n m_k \geq 2$ . Соотношение (1.2) называется резонансом. Число  $|m| = \sum_{k=1}^n m_k$  называется порядком резонанса.

**Замечание.** В рассматриваемом нами случае для каждой пары собственных чисел наблюдается резонанс порядка 3:

$$i\omega_j = 2i\omega_j + (-i\omega_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

В [12] приведены утверждения, позволяющие с помощью линейной замены переменных привести исходную систему к линейному виду.

Пусть  $h$  — векторный многочлен от  $y$  порядка  $r \geq 2$  и  $h(0) = h'(0) = 0$ .

**Лемма 1.** Дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = A_0 y \quad (1.4)$$

при замене  $x = y + h(y)$  превращается в

$$\dot{x} = A_0 x + v(x) + \dots, \quad (1.5)$$

где  $v(x) = \frac{\partial h}{\partial x} A_0 x - A_0 h(x)$ , а многоточие означает члены порядка выше  $r$ .

На основе приведенной леммы может быть доказана следующая теорема, принадлежащая Пуанкаре.

**Теорема 1 (Пуанкаре).** Если собственные числа матрицы  $A$  нерезонансны, то уравнение

$$\dot{x} = A_0 x + \dots, \quad (1.6)$$

формальной заменой переменной  $x = y + \dots$  приводится к линейному уравнению (1.4) (многоточия означают ряды, начинающиеся с членов выше первой степени).

Так как в исследуемом нами случае всегда имеется резонанс порядка 3, то теорема Пуанкаре не применима и необходимы дополнительные утверждения, позволяющие работать с системами в резонансном случае.

**Теорема Пуанкаре-Дюлака.** Расширением теоремы Пуанкаре на случай резонанса является теорема Пуанкаре-Дюлака, утверждающая, что формальной заменой переменных можно уничтожить все нерезонансные



члены в уравнении (1.1). Для формулировки теоремы оказывается важным понятие резонансных одночленов. Дадим их определение.

Пусть набор собственных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  линейного оператора  $A_0$  резонансный. Пусть  $e_s$  — вектор собственного базиса,  $x_i$  — координаты в базисе,  $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$  — моном (одночлен) от координат  $x_i$ .

**Определение 2.** Вектор-одночлен  $x^m e_s$  называется резонансным, если

$$\lambda_s = (m, \lambda), \quad |m| \geq 2. \quad (1.7)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1), заданное формальным рядом  $F(x) = A_0 x + \dots$ ,

**Теорема 2** (Пуанкаре-Дюлак). При помощи формальной замены переменных уравнение (1.1) можно привести к канонической (нормальной) форме

$$\dot{y} = A_0 y + w(y), \quad (1.8)$$

где все мономы ряда  $w$  — резонансные.

Основой доказательства сформулированной теоремы служит алгоритм поэтапного определения элементов замены таким образом, чтобы поочередно уничтожать одночлены все более высоких степеней в правой части системы (1.1). Полное обоснование теоремы Пуанкаре-Дюлака можно найти, например, в книге [12].

Применение теоремы Пуанкаре-Дюлака позволяет перейти от произвольной нелинейной системы к системе, содержащей лишь резонансные слагаемые. Нетрудно видеть, что с точки зрения устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1.1), главное значение имеет матрица линейной части  $A_0$ . При этом понятно, что если часть спектра этой матрицы лежит в правой комплексной полуплоскости, то нулевое решение неустойчиво.

Следует отметить, что наибольший интерес, например, с точки зрения теории бифуркаций, вызывает иная ситуация, когда собственные числа матрицы лежат в левой комплексной полуплоскости и часть спектра находится на мнимой оси. В этой ситуации большое значение приобретает теория интегральных многообразий (центральных многообразий), в соответствии с которой фазовое пространство динамической системы удается расщепить на устойчивое и нейтральное многообразие, и затем изучать решения уже только на многообразии. Перейдем к описанию утверждений, носящих название теорем о центральном многообразии.

### 1.3 Теорема о центральном многообразии

Согласно [6], рассмотрим векторное поле

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y), \\ \dot{y} &= By + g(x, y), \end{aligned} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \quad (1.9)$$

где  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'(0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0) = 0$ ,  $g'(0, 0) = 0$ . Здесь  $A$  — матрица размерности  $c \times c$ , имеющая чисто мнимые собственные значения (в нашем случае  $c = 2m$ );  $B$  — матрица размерности  $s \times s$ , собственные значения которой имеют отрицательные действительные части;  $f$  и  $g$  — функции класса  $C^r$  ( $r \geq 2$ ).

Дадим определение центрального многообразия.

**Определение 3.** *Инвариантное многообразие будем называть центральным многообразием для системы (1.9), если оно может быть представлено в виде*

$$W^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, h'(0) = 0\}, \quad (1.10)$$

где  $\delta$  — достаточно мало.

Приведем основные теоремы, которые будут нами использоваться при построении нормальных форм на интегральных многообразиях.

**Теорема 3.** *Для системы (1.9) существует центральное многообразие класса  $C^r$ . Динамика системы (1.9) на центральном многообразии, при достаточно малых  $u$ , описывается следующим векторным полем размерности  $c$ :*

$$\dot{u} = Au + F(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^c. \quad (1.11)$$

Следующий результат означает, что динамика системы (1.11) вблизи решения определяет динамику системы (1.9) в окрестности точки  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Теорема 4.**

**1.** *Пусть нулевое решение системы (1.11) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво). Тогда нулевое решение системы (1.9) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво).*

**2.** *Пусть нулевое решение (1.11) устойчиво. Тогда если  $(x(t), y(t))$  — решение (1.9) достаточно мало, то существует решение (1.11) такое, что при  $t \rightarrow \infty$*

$$x(t) = u(t) + O(\exp(-\gamma t)), \quad (1.12)$$

где  $\gamma$  — положительная константа.

## 1.4 Описание основного алгоритма

Перейдем к описанию основного алгоритма получения нормальной формы изучаемой системы (см., например, [13]). Уточним сначала постановку задачи и условия. Пусть задана система (1.1) обыкновенных уравнений в  $\mathbb{R}^n$  с малым параметром  $\varepsilon > 0$ , удовлетворяющая стандартным бифуркационным ограничениям. А именно, считаем, что,

**во-первых**, матрица  $A_0$  имеет на мнимой оси  $m$  пар простых собственных значений  $\pm\omega_s$ ,  $\omega_s > 0$ ,  $s = 1, \dots, m$  (остальные ее точки спектра предполагаем лежащими в комплексной полуплоскости  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ );

**во-вторых**, для частот  $\omega_s$  выполняются условия нерезонансности

$$\omega_s \neq n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_m\omega_m, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.13)$$

где  $(n_1, \dots, n_m)$  — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяющий неравенствам

$$2 \leq |n_1| + |n_2| + \dots + |n_m| \leq 3; \quad (1.14)$$

**в-третьих**, тейлоровское разложение в нуле вектор-функции  $F(x) \in C^\infty$  имеет вид

$$F(x) = (A_0 + \varepsilon A_1)x + F_2(x, x) + F_3(x, x, x) + \dots, \quad (1.15)$$

где  $F_2(x, x)$ ,  $F_3(x, x, x)$ , ... — квадратичная, кубическая и т.д. формы.

При сделанных допущениях автоколебания системы (1.1), бифурцирующие из ее нулевого состояния равновесия при  $\varepsilon > 0$ , будем искать в виде формального ряда по целым степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ :

$$x = \sqrt{\varepsilon}x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}x_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.16)$$

где

$$x_0 = \sum_{s=1}^m [\xi_s a_s \exp(i\omega_s t) + \bar{\xi}_s \bar{a}_s \exp(-i\omega_s t)]. \quad (1.17)$$

Здесь  $a_s$ ,  $s = 1, \dots, m$  — собственные векторы матрицы  $A_0$ , отвечающие ее собственным значениям  $i\omega_s$  и нормированные условиями  $(a_s, b_s) = 1$ ,  $(\bar{a}_s, b_s) = 0$ ,  $s = 1, \dots, m$ , где  $A_0^* b_s = -i\omega_s b_s$ , а  $(*, *)$  — евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{C}^n$ ;  $\xi_s = \xi_s(\tau)$  — пока произвольные (подлежащие определению) комплексные амплитуды; все функции  $x_k$ ,  $k \geq 1$ , — тригонометрические полиномы переменных  $\omega_1 t, \dots, \omega_m t$ .

Подставляя соотношения (1.16), (1.17) в уравнение (1.1), учитывая тейлоровское разложение (1.15) и приравнивая слева и справа коэффициенты при  $\varepsilon$ , для отыскания  $x_1$  получаем линейную неоднородную систему

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} - A_0 x_1 = g_1(t, \tau), \quad (1.18)$$

где

$$g_1 = \sum_{s,k=1}^m m \left[ F_2(a_s, a_k) \xi_s \xi_k \exp(i(\omega_s + \omega_k)t) + \right. \\ \left. + F_2(a_s, \bar{a}_k) \xi_s \bar{\xi}_k \exp(i(\omega_s - \omega_k)t) + \right. \\ \left. + F_2(\bar{a}_s, a_k) \bar{\xi}_s \xi_k \exp(i(\omega_k - \omega_s)t) + \right. \\ \left. + F_2(\bar{a}_s, \bar{a}_k) \bar{\xi}_s \bar{\xi}_k \exp(-i(\omega_s + \omega_k)t) \right],$$

а переменная  $\tau$  рассматривается как параметр. Из уравнения (1.18) функция  $x_1$  однозначно определяется в том же виде, что и неоднородность  $g_1$ , т. е. в виде суммы нулевых и вторых гармоник переменных  $\omega_1 t, \dots, \omega_m t$ . Подчеркнем, что возможность такого определения обеспечивает группа условий нерезонансности (1.13), отвечающая случаю  $|n_1| + \dots + |n_m| = 2$ .

Приравняем затем коэффициенты при степени  $\varepsilon^{3/2}$ . В результате для  $x_2$  приходим к аналогичному (1.18) уравнению, но с неоднородностью  $g_2$ , являющейся суммой первых и третьих гармоник. В таком же виде ищем и  $x_2(t, \tau)$ . Однако здесь возникает новый момент: для амплитуд функции  $x_2$  при первых гармониках получаются вырожденные линейные неоднородные алгебраические уравнения, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$(g_{2,s}(\tau), b_s) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.19)$$

где  $g_{2,s}$  — коэффициенты неоднородности  $g_2$  при  $\exp i\omega_s t$ . Эти условия приводят, в свою очередь, к системе вида

$$\frac{d\xi_s}{d\tau} = \left[ (A_1 a_s, b_s) + \sum_{k=1}^m d_{sk} |\xi_k|^2 \right] \xi_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.20)$$

для нахождения неизвестных амплитуд  $\xi_s$  (при этом  $\bar{\xi}_s$  удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям).

И наконец, остается добавить, что если в качестве фигурирующих в (1.17) функций  $\xi_s = \xi_s(\tau)$ ,  $s = 1, \dots, m$ , выбрано произвольное решение системы (1.20), то полностью определяются все три выписанных в (1.16) слагаемых. Действительно, однозначную разрешимость линейных неоднородных алгебраических уравнений для коэффициентов функции  $x_2$  при третьих гармониках обеспечивают оставшиеся условия нерезонансности из (1.13), (1.14), отвечающие случаю

$$|n_1| + \dots + |n_m| = 3.$$

Несколько отступая от общепринятой терминологии, систему (1.20) назовем нормальной формой исходного уравнения (1.1). Подобное название оправдано тем, что именно она отвечает за бифуркации циклов и торов этого уравнения. Для того, чтобы сформулировать здесь строгий результат, перейдем от (1.20) к вспомогательной системе для  $\eta_s = |\xi_s|^2$ :

$$\frac{d\eta_s}{d\tau} = \left[ \alpha_s + \sum_{k=1}^m \alpha_{sk} \eta_k \right] \eta_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1.21)$$

где  $\alpha_s = 2\operatorname{Re}(A_1 a_s, b_s)$ ,  $\alpha_{sk} = 2\operatorname{Re} d_{sk}$ .

Предположим, что система (1.21) имеет некоторое состояние равновесия

$$\eta_{s_j} = \rho_j > 0, \quad j = 1, \dots, p; \quad \eta_s = 0 \quad \text{при } s \neq s_j, \quad (1.22)$$

где  $p \leq m$ ,  $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq m$  — произвольно фиксированные натуральные числа. Тогда нормальная форма (1.20) имеет, очевидно,  $p$ -мерный автомодельный тор вида

$$\begin{aligned} \xi_{s_j}(\tau) &= \sqrt{\rho_j} \exp(i\psi_j \tau), \quad j = 1, \dots, p; \\ \xi_s &= 0 \quad \text{при } s \neq s_j, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$\psi_j = \operatorname{Im}(A_1 a_{s_j}, b_{s_j}) + \sum_{k=1}^p \rho_k \operatorname{Im} d_{s_j s_k}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Подставляя, далее, компоненты этого тора в первые три слагаемых ряда (1.16), получим приближенный (с точностью до  $\varepsilon^2$  по невязке) инвариантный тор исходной системы (1.1). Тем самым возникает естественный вопрос о существовании и устойчивости соответствующего ему точного инвариантного тора. Ответ на него дает следующее утверждение (см. [18, 19]).

**Теорема 5.** Пусть система (1.20) имеет  $p$ -мерный автомодельный тор вида (1.23), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный.

Тогда по любому натуральному  $l$  можно указать такое достаточно малое  $\varepsilon_l > 0$ , что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$  исходная система (1.1) имеет  $p$ -мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами

$$x = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^p \sqrt{\rho_j} [a_{s_j} \exp(i\varphi_j) + \bar{a}_{s_j} \exp(-i\varphi_j)] + \varepsilon u_*(\varphi, \varepsilon), \quad (1.24)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon\psi + \varepsilon^{3/2}\psi_*(\varphi, \varepsilon).$$

Здесь  $\varphi = \text{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ ,  $\psi = \text{colon}(\psi_1, \dots, \psi_p)$ ,  $\omega = \text{colon}(\omega_{s_1}, \dots, \omega_{s_p})$ , а  $2\pi$ -периодические по  $\varphi$  функции  $u_*$ ,  $\psi_*$  и их всевозможные частные производные по  $\varphi$  до порядка  $l$  включительно ограничены равномерно по  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  в метрике  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^p$  соответственно.

В дополнение к сформулированной теореме заметим, что проверка устойчивости автомодельного тора (1.23) сводится, очевидно, к исследованию устойчивости соответствующего ему состояния равновесия (1.22) в системе (1.20). Поэтому количество и устойчивость инвариантных торов вида (1.24) у исходного уравнения (1.1) определяется в конечном итоге по состояниям равновесия вспомогательной системы (1.21) в конусе векторов с неотрицательными координатами. Прделанные выше построения имеют прозрачный геометрический смысл. В самом деле, при сформулированных ограничениях у системы (1.1) в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует  $2m$ -мерное экспоненциально орбитально устойчивое центральное многообразие, а система (1.20) в силу своего вывода является укороченной (с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon$ ) нормальной формой на данном многообразии. Таким образом, теорема 5 — это стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной системы (1.1) и ее укороченной нормальной формы.

## 1.5 Структура нормальной формы в простейших случаях

Резонансные соотношения, упомянутые в теореме Пуанкаре-Дюлака, приводят к классификации нормальных форм в соответствии с их коразмерностью. Под коразмерностью, следуя [9], будем понимать разность между размерностью пространства параметров задачи и топологической размерностью множества значений параметров системы, при которых реализуется

критический случай. Очевидно, что случаями коразмерности один являются ситуации, когда на мнимой оси находится нулевое или одна пара собственных значений. Ситуация коразмерности два несколько сложнее, поскольку она реализуется как в случае, когда на мнимую ось выходит не одна, а две пары, или пара и нулевое собственное число, так и в случае, если нарушены некоторые дополнительные условия устойчивости для построенной нормальной формы (в случае, например, одной пары). Все нормальные формы коразмерности два приведены, например, в [9, 14–16]. Понятно, что ситуация коразмерности три дает ещё большее разнообразие всевозможных случаев. Далеко не все из них подробно изучены.

Рассмотрим сначала случай коразмерности один, в котором выделим два подслучая:

1. Наличие у матрицы  $A_0$  одного нулевого собственного числа (дивергентная потеря устойчивости).
2. Наличие у матрицы  $A_0$  пары чисто мнимых собственных чисел (колебательная потеря устойчивости).

### 1.5.1 Транскритическая и вилообразная бифуркации

В ситуации когда матрица  $A_0$  имеет лишь нулевое собственное число, а остальные собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости в расщепленной системе (1.9) первое уравнение одномерно и может быть сведено к одному из трех видов (см. [9]):

$$\dot{x} = \alpha_0 \varepsilon - \alpha_2 x^2 + \dots, \quad (1.25)$$

$$\dot{x} = \alpha_1 \varepsilon x - \alpha_2 x^2 + \dots, \quad (1.26)$$

$$\dot{x} = \alpha_1 \varepsilon x - \alpha_2 x^3 + \dots, \quad (1.27)$$

Фазовые перестройки происходящие с динамической системой в первом из случаев носят название бифуркации типа седло-узел, во втором случае — транскритическая бифуркация и в последнем случае — бифуркации типа вилка.

Сразу заметим, что для системы (1.1) первая из бифуркаций невозможна, поскольку при любых значениях  $\varepsilon$  эта система имеет нулевое состояние равновесия.

Перейдем теперь ко второму и третьему случаям. Предположим, что нулевому собственному числу матрицы  $A_0$  соответствует собственный вектор  $a$  так, что  $A_0 a = 0$ , кроме того выберем собственный вектор  $b$  сопряженной

задачи  $A_0^*b = 0$  и пронормируем их так, чтобы  $(a, b) = 1$ . Для получения нормальной формы выполним в системе (1.1) для случая транскритической бифуркации следующую замену:

$$x = \varepsilon z(\tau)a + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.28)$$

тогда из (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z'a + \varepsilon^2(\dot{x}_1 + \varepsilon x'_1) + \dots = (A_0 + \varepsilon A_1)(\varepsilon z(\tau)a + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \dots) + \\ + F_2(\varepsilon z(\tau)a + \dots, \varepsilon z(\tau)a + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (1.29)$$

Здесь точкой обозначена производная по  $t$ , а штрихом — по  $\tau$ . Приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon$ , получаем верное тождество, а при  $\varepsilon^2$  — систему вида

$$z'a + \dot{x}_1 = A_0 x_1 + z A_1 a + z^2 F_2(a, a). \quad (1.30)$$

Из условий разрешимости уравнения (1.30) в классе ограниченных функций получаем нормальную форму

$$z' = (A_1 a, b)z + (F_2(a, a), b)z^2. \quad (1.31)$$

Смысл транскритической бифуркации состоит в том, что нулевое и отличное от нуля решения системы (1.1) меняются устойчивостью.

Вилообразная бифуркация реализуется при  $(F_2(a, a), b) = 0$ . В этом случае замена приобретает вид

$$x = \sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.32)$$

тогда имеем аналогичную (1.29) подстановку

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/2} z'a + \varepsilon(\dot{x}_1 + \varepsilon x'_1) + \varepsilon^{3/2}(\dot{x}_2 + \varepsilon x'_2) + \dots = \\ = (A_0 + \varepsilon A_1)(\sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_2(t, \tau) + \dots) + \\ + F_2(\sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \varepsilon x_1(t, \tau) + \dots, \sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \varepsilon x_1(t, \tau) + \dots) + \\ + F_3(\sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \dots, \sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \dots, \sqrt{\varepsilon} z(\tau)a + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

Приравнивая коэффициенты при  $\sqrt{\varepsilon}$ , получаем верное тождество. При  $\varepsilon$  имеем

$$\dot{x}_1 = A_0 x_1 + z^2 F_2(a, a). \quad (1.34)$$

В силу равенства  $(F_2(a, a), b) = 0$  эта задача имеет не зависящее от  $t$  решение  $x_1 = z^2 w_1$ , где  $w_1$ , в свою очередь, — решение линейной системы

$$A_0 w_1 = -F_2(a, a). \quad (1.35)$$



Учитывая, что по формуле (1.35) величина  $w_1$  определяется неоднозначно, дополним ее условием  $(w_1, a) = 0$ .

На третьем шаге при  $\varepsilon^{3/2}$  получаем

$$z'a + \dot{x}_2 = A_0 x_2 + zA_1 a + z^3(F_2(a, w_1) + F_2(w_1, a) + F_3(a, a, a)). \quad (1.36)$$

Как и прежде из условий разрешимости имеем

$$z' = (A_1 a, b)z + (F_2(a, w_1) + F_2(w_1, a) + F_3(a, a, a), b)z^3. \quad (1.37)$$

Бифуркация типа вилки реализуется, например, при условии нечетности функции правой части системы (1.1) (в этом случае  $F_2(a, a) = 0$ ). Указанные фазовые перестройки сопровождаются потерей устойчивости нулевого решения исходной системы и мягким ответвлением от него двух устойчивых состояний равновесия.

## 1.5.2 Бифуркация Андронова-Хопфа

Предположим теперь, что среди собственных чисел матрицы  $A_0$  исходной системы (1.1) имеется единственная чисто мнимая пара  $\pm i\omega$ . Кроме того, будем считать, что матрица  $A_0 + \varepsilon A_1$  имеет при  $\varepsilon > 0$  собственные числа в правой комплексной полуплоскости.

Предположим, что чисто мнимому собственному значению  $i\omega$  матрицы  $A_0$  и сопряженной к ней матрицы  $A_0^*$  соответствуют комплексные собственные векторы  $a$  и  $b$ , т. е.  $A_0 a = i\omega a$ ,  $A_0^* b = -i\omega b$ . Определенные с точностью до констант векторы  $a$  и  $b$  пронормируем так, чтобы  $(a, b) = 1$  (скалярное произведение берется в смысле унитарного пространства, т. е.  $(a, b) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2$ ).

Рассмотрим систему (1.1) сначала при  $\varepsilon = 0$  и найдем ее нормальную форму методом Пуанкаре-Дюлака. В нашем случае собственные числа находятся в резонансном соотношении

$$\lambda_j = (k + 1)\lambda_j + k\lambda_{3-j}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.38)$$

причем порядок резонанса равен трем.

В системе (1.1) перейдем к собственному базису  $a, \bar{a}$ . Для этого выполним замену  $x = az + \bar{a}\bar{z}$ , которая переводит исходную систему в пару комплексно сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega z + \overline{R_2(z, \bar{z})}, \\ \dot{\bar{z}} &= -i\omega \bar{z} + R_2(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (1.39)$$

где в  $R_2(z, \bar{z})$  включены все нелинейные слагаемые системы (1.1) при  $\varepsilon = 0$ . В силу сопряженности соотношений (1.39) достаточно рассмотреть первое из них. Как уже отмечалось, имеются резонансы  $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2, \dots$ , поэтому наше уравнение должно приводиться к виду

$$\dot{\eta} = i\omega\eta + (d_0 + ic_0)\eta|\eta|^2 + (d_1 + ic_1)\eta|\eta|^4 + \dots, \quad (1.40)$$

с помощью замены переменных

$$z = \eta + a_1\eta\bar{\eta} + a_2\eta|\eta|^2 + a_3\bar{\eta}|\eta|^2 + \dots \quad (1.41)$$

Неопределенные константы  $a_j$  и  $d_j + ic_j$   $j = 1, 2, \dots$  фиксируются после подстановки замены в первое из уравнений (1.39) и учета уравнения (1.40). Приравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах в (1.39), для нерезонансных одночленов получаем уравнения, однозначно разрешимые относительно  $a_j$ , а для резонансных – относительно  $d_j + ic_j$ . Величины  $a_j$ , стоящие при резонансных слагаемых, могут быть взяты, вообще говоря, любыми и выбираются из соображений простоты замены (1.41) (например, нули).

Числа  $d_j + ic_j$  называются ляпуновскими величинами. Первая ляпуновская величина с отличной от нуля вещественной частью определяет качественную картину окрестности состояния равновесия. Действительно, предположим, что  $d_0 \neq 0$ , и выполним в уравнении (1.41) полярную замену  $\eta = \xi \exp i\omega\tau$ , тогда для вещественных переменных  $\xi$  и  $\tau$  получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= d_0\xi^3 + O(\xi^5), \\ \omega\dot{\tau} &= \omega + c_0\xi^2 + O(\xi^4), \end{aligned} \quad (1.42)$$

из которых очевидно, что амплитудная переменная  $\xi$  растет при  $d_0 > 0$  и убывает при  $d_0 < 0$ . Фазовая переменная  $\tau$  с высокой степенью точности совпадает с независимой переменной  $t$ , сдвинутой на некоторую наперед заданную константу. Возвращаясь теперь к переменным  $x$  и  $t$ , имеем

$$x(t) = \xi(t)(ae^{i\omega\tau(t)} + \bar{a}e^{-i\omega\tau(t)}) + \dots \quad (1.43)$$

Из формулы (1.43) ясно, что изучаемое состояние равновесия – сложный фокус, устойчивый при условии отрицательности вещественной части ляпуновской величины и неустойчивый в противном случае.

Для исследования системы (1.1) при отличных от нуля значениях  $\varepsilon$  воспользуемся вариантом метода нормальных форм, который определяется заменой (1.43) и уравнениями нормальной формы (1.42). С целью учета малого

параметра  $\varepsilon$  в правой части уравнений и в замене добавим соответствующие разложения по  $\varepsilon$ . Использование замены

$$x = \xi(ae^{i\omega\tau} + \bar{a}e^{-i\omega\tau}) + \varepsilon\xi u_1(\tau) + \xi^2 u_2(\tau) + \xi^3 u_3(\tau) + \dots, \quad (1.44)$$

где  $u_j(\tau), j = 1, 2, \dots$  – гладкие  $2\pi/\omega$ -периодические функции, обусловлено поисками колебательных решений, главное приближение которых доставляет уже первое слагаемое в формуле (1.44).

При помощи замены (1.44) попытаемся преобразовать систему (1.1) к нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi_0 \varepsilon \xi + d_0 \xi^3 + O(\varepsilon^2 |\xi| + |\varepsilon| \xi^2 + \xi^5), \\ \dot{\tau} &= 1 + \psi_0 \varepsilon + c_0 \xi^2 + O(\varepsilon^2 + |\varepsilon \xi| + \xi^4), \end{aligned} \quad (1.45)$$

где  $\varphi_0, \psi_0, d_0, c_0$  – постоянные. Подставим (1.44) в (1.1) и учтем (1.45), затем в полученных соотношениях

$$\begin{aligned} &(\varphi_0 \varepsilon \xi + d_0 \xi^3 + \dots)(\xi(ae^{i\omega\tau} + \bar{a}e^{-i\omega\tau}) + \dots) + \\ &+ (1 + \psi_0 \varepsilon + c_0 \xi^2 + \dots)(i\omega \xi a e^{i\omega\tau} - i\omega \xi \bar{a} e^{-i\omega\tau} + \\ &+ \varepsilon \xi \dot{u}_1(\tau) + \xi^2 \dot{u}_2(\tau) + \xi^3 \dot{u}_3(\tau) + \dots) = \\ &= (A_0 + \varepsilon A_1)(\xi(ae^{i\omega\tau} + \bar{a}e^{-i\omega\tau}) + \\ &+ \varepsilon \xi u_1(\tau) + \xi^2 u_2(\tau) + \xi^3 u_3(\tau) + \dots) + \\ &+ F_2(\xi a e^{i\omega\tau} + \dots, \xi a e^{i\omega\tau} + \dots) + \\ &+ F_3(\xi a e^{i\omega\tau} + \dots, \xi a e^{i\omega\tau} + \dots, \xi a e^{i\omega\tau} + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (1.46)$$

приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и  $\xi$ . В результате приходим к одностепенным линейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots$ :

$$\dot{u} = A_0 u + f(\tau), \quad (1.47)$$

где  $f(\tau)$  –  $2\pi/\omega$ -периодические функции. Система (1.47) разрешима в классе  $2\pi/\omega$ -периодических функций при условии выполнения следующих соотношений:

$$\int_0^{2\pi/\omega} (f(\tau), e^{i\omega\tau} b) d\tau = 0, \quad \int_0^{2\pi/\omega} (f(\tau), e^{-i\omega\tau} \bar{b}) d\tau = 0. \quad (1.48)$$

Предположим, что  $f(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp i\omega\tau + \alpha_2 \exp 2i\omega\tau + \dots$ , где  $\alpha_j$  – некоторые постоянные векторы, тогда решение  $u(\tau)$  можно искать в виде суммы

$\beta_0 + \beta_1 \exp i\omega\tau + \beta_2 \exp 2i\omega\tau + \dots$ , векторы  $\beta_j$  ( $j \neq 1$ ) которой однозначно определяются из линейных алгебраических систем

$$(i\omega j E, A_0)\beta_j = \alpha_j. \quad (1.49)$$

Матрица системы (1.49) при  $j = 1$  вырождена, однако из условия (1.48) имеем  $(\alpha_1, b) = 0$ , что гарантирует существование решения  $\beta_1$ , определяемого с точностью до слагаемых  $ca$ , где  $c$  – произвольная константа. Для определенности будем выбирать вектор  $\beta_1$  ортогональным  $b$ , т.е. потребуем выполнения равенства  $(\beta_1, b) = 0$ . Итак, при условии (1.48), выполнения которого можно добиться подходящим выбором постоянных  $\varphi_0, d_0, \psi_0, c_0$ , функции  $u_j(\tau)$  легко вычисляются.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающую после приравнивания коэффициентов при  $\varepsilon$  и  $\xi$ :

$$\dot{u}_1 = A_0 u_1 + A_1 a e^{i\omega\tau} (\varphi_0 + i\psi_0) a e^{i\omega\tau}. \quad (1.50)$$

Из условий разрешимости полученной системы и условий, наложенных на векторы  $a$  и  $b$ , получаем константы  $\varphi_0, \psi_0$

$$\varphi_0 + i\psi_0 = (A_1 a, b). \quad (1.51)$$

Ляпуновские величины  $d_0$  и  $c_0$  зависят лишь от нелинейных слагаемых системы (1.1) при  $\varepsilon = 0$ . Для их вычисления требуется два шага: сначала из системы, полученной приравниванием коэффициентов при  $\xi^2$ , определяется функция  $u_2(\tau)$  (система не содержит слагаемых с  $\exp(i\omega\tau)$  или  $\exp(-i\omega\tau)$  и потому всегда разрешима), а затем из условий разрешимости системы при  $\xi^3$  определяются ляпуновские величины.

Приравнивание коэффициентов при  $\xi^2$  приводит к системе

$$\dot{u}_2 = A_0 u_2 + F_2(a, a) e^{2i\omega\tau} + F_2(\bar{a}, \bar{a}) e^{-2i\omega\tau} + F_2(\bar{a}, a) + F_2(a, \bar{a}), \quad (1.52)$$

$2\pi/\omega$ -периодическое решение которой имеет вид:

$$u_2(\tau) = w_0 + w_1 e^{2i\omega\tau} + \bar{w}_1 e^{-2i\omega\tau}, \quad (1.53)$$

где векторы  $w_0, w_1$  определяются из соотношений

$$w_0 = -A_0^{-1}(F_2(\bar{a}, a) + F_2(a, \bar{a})), w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1} F_2(a, a). \quad (1.54)$$

Если теперь приравнять коэффициенты при  $\xi^3$ , получим следующую систему:

$$\dot{u}_3 = A_0 u_3 + g_1 e^{i\omega\tau} + g_3 e^{3i\omega\tau} + \bar{g}_1 e^{-i\omega\tau} + \bar{g}_3 e^{-3i\omega\tau}, \quad (1.55)$$

где  $g_1 = (F_2(a, w_0) + F_2(w_0, a) + F_2(\bar{a}, w_1) + F_2(w_1, \bar{a}) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a) - (d_0 + ic_0)a)$ , а вид  $g_3$  не имеет значения для вычисления величины  $d_0 + ic_0$ . Условия разрешимости системы (1.55) в классе  $2\pi/\omega$ -периодических решений принимают в соответствии с формулой (1.48) вид

$$d_0 + ic_0 = (F_2(a, w_0) + F_2(w_0, a) + F_2(\bar{a}, w_1) + F_2(w_1, \bar{a}) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a), b). \quad (1.56)$$

Напомним, что векторы  $w_0, w_1$  в формуле (1.56) определяются в соответствии с соотношениями (1.54).

Предположим теперь, что определенные выше числа  $\varphi_0$  и  $d_0$  отличны от нуля, тогда в достаточно малой окрестности нуля можно полностью проанализировать систему (1.1). Действительно, укороченное первое уравнение системы (1.45)

$$\dot{\xi} = \varphi_0 \varepsilon \xi + d_0 \xi^3 \quad (1.57)$$

не зависит от второго, и при  $\varphi_0 d_0 < 0$  и  $\varepsilon > 0$  имеет, наряду с нулевым, состояния равновесия

$$\xi_{1,2}^* = \pm \sqrt{-\varepsilon \varphi_0 / d_0}, \quad (1.58)$$

асимптотически устойчивые при  $\varphi_0 > 0$  и неустойчивые при  $\varphi_0 < 0$ . Отсюда следует, что для функции  $\xi(t)$  выполнено одно из предельных соотношений  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_1^*$  или  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_2^*$ . При этом из замены (1.44) сразу получаем асимптотические формулы периодического режима системы (1.1), устойчивость которого, очевидно, определяется устойчивостью состояния равновесия (1.58). Заметим, что состояниям равновесия разных знаков соответствует в данном случае одно и то же, с точностью до фазового сдвига, периодическое решение (1.44). Таким образом, при  $\varphi_0 > 0, \varphi_1 < 0$  и  $\varepsilon > 0$  нулевое состояние равновесия системы (1.1) теряет устойчивость и от него бифурцирует устойчивый близкий к гармоническому цикл, радиус которого имеет порядок малости  $\sqrt{\varepsilon}$ . Такая фазовая перестройка называется бифуркацией Андронова-Хопфа. При этом любая траектория с нетривиальными начальными условиями из некоторой окрестности нуля, содержащей цикл, неограниченно приближается к этому циклу, что позволяет называть такую бифуркацию мягким ветвлением предельного цикла. Бифуркация неустойчивого предельного цикла ( $\varphi_0 < 0, d_0 > 0$ ) приводит при  $\varepsilon > 0$  к жесткому режиму возбуждения колебаний, поскольку траектории с начальными условиями внутри цикла приближаются к асимптотически устойчивому нулевому состоянию равновесия, а вне цикла уходят на нелокальный устойчивый режим.

Формулы (1.56) легко программируются с помощью пакета символьных вычислений “Mathematica“. В приложении приведена программа, в символьном виде определяющая по заданным правым частям системы (1.1) коэффициенты нормальной формы (1.45). С ее помощью для систем, приведенных ниже, не трудно построить нормальную форму и решить соответствующие им задачи.

**Задача 1.** На плоскости параметров  $\alpha, \beta$  системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y + \beta xy - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (1.59)$$

построить область, для которой реализуется бифуркация Андронова-Хопфа.

**Задача 2.** Определить положительные значения параметров системы Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (1.60)$$

при которых происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

### 1.5.3 Обзор бифуркаций коразмерности два

Перейдем теперь к бифуркациям коразмерности два. Ниже рассмотрим только те случаи, которые связаны с выходом на мнимую ось собственных чисел матрицы  $A_0$ . Бифуркации коразмерности два, обусловленные обращением в ноль коэффициентов при  $z^2$  в нормальной форме (1.31) или коэффициентов при  $z^3$  в нормальных формах (1.37) и (1.57), подробно рассмотрены, например, в [9] и [14].

Естественным образом выделяются три случая.

1. Матрица  $A_0$  имеет нулевое собственное число кратности два.
2. Матрица  $A_0$  имеет пару чисто мнимых и нулевое собственное число.
3. Матрица  $A_0$  имеет две пары чисто мнимых собственных чисел, не связанных резонансными соотношениями.

**Нулевое собственное число кратности два.** Пусть матрица  $A_0$  имеет нулевое собственное число кратности два, которому соответствуют два линейно независимых собственных вектора  $a_1$  и  $a_2$ . Выберем их и собственные векторы сопряженной задачи  $A^*b_j = 0$ ,  $j = 1, 2$  так, что  $(a_j, b_k) = \delta_{jk}$ , где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера. Выполним замену

$$x = \sqrt{\varepsilon}(z_1(\tau)a_1 + z_2(\tau)a_2) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}x_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.61)$$

Подстановка (1.61) в (1.1) дает следующие соотношения

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{3/2}(z_1'(\tau)a_1 + z_2'(\tau)a_2) + \varepsilon(\dot{x}_1 + \varepsilon x_1') + \varepsilon^{3/2}(\dot{x}_2 + \varepsilon x_2') + \dots = \\ & = (A_0 + \varepsilon A_1)(\sqrt{\varepsilon}(z_1(\tau)a_1 + z_2(\tau)a_2) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}x_2(t, \tau) + \dots) + \\ & + F_2(\sqrt{\varepsilon}(z_1a_1 + z_1a_2) + \varepsilon x_1 + \dots, \sqrt{\varepsilon}(z_1a_1 + z_1a_2) + \varepsilon x_1 + \dots) + \\ & + F_3(\sqrt{\varepsilon}(z_1a_1 + z_1a_2) + \dots, \sqrt{\varepsilon}(z_1a_1 + z_1a_2) + \dots, \sqrt{\varepsilon}(z_1a_1 + z_1a_2) + \dots), \end{aligned} \quad (1.62)$$

из них при  $\varepsilon$  получаем уравнение

$$\dot{x}_1 = A_0x_1 + z_1^2F_2(a_1, a_1) + z_1z_2(F_2(a_1, a_2) + F_2(a_2, a_1)) + z_2^2F_2(a_2, a_2), \quad (1.63)$$

которое разрешимо лишь при специальном выборе  $F_2(x, x)$ . Предполагая для простоты  $F_2(x, x) = 0$ , получаем на третьем шаге уравнение

$$\begin{aligned} z_1'a_1 + z_2'a_2 + \dot{x}_2 = & A_0x_2 + z_1A_1a_1 + z_2A_1a_2 + \\ & + F_3(z_1a_1 + z_1a_2, z_1a_1 + z_1a_2, z_1a_1 + z_1a_2), \end{aligned} \quad (1.64)$$

из условий разрешимости которого может быть записана нормальная форма

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1z_1 + (d_{11}z_1^2 + d_{12}z_2^2)z_1, \\ z_2' &= \gamma_2z_2 + (d_{21}z_1^2 + d_{22}z_2^2)z_2, \end{aligned} \quad (1.65)$$

где  $\gamma_j = (A_1a_j, b_j)$ ,  $d_{jk} = (F_3(a_j, a_k, a_k) + F_3(a_k, a_j, a_k) + F_3(a_k, a_k, a_j), b_j)$ ,  $d_{jj} = (F_3(a_j, a_j, a_j), b_j)$ ,  $j, k = 1, 2$ ,  $j \neq k$ . Отметим, что функции  $z_j(\tau)$  в данном случае вещественные.

**Задача 3.** Выделите класс ненулевых квадратичных нелинейностей  $F_2(x, x)$ , для которых нормальная форма задачи (1.1), с нулевым собственным числом кратности два, имеет вид (1.65)

**Задача 4.** В предположении, что  $F_2(x, x) \neq 0$ , выполните в (1.1) замену

$$x = \varepsilon(z_1(\tau)a_1 + z_2(\tau)a_2) + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (1.66)$$

С помощью замены (1.66) решите следующие задачи:

1. Постройте нормальную форму задачи (1.1).
2. Найдите состояния равновесия полученной нормальной формы и исследуйте их на устойчивость.

Отметим, что случай кратного нулевого собственного числа рассмотрен в книге [9].

**Нулевое и пара чисто мнимых собственных чисел.** Пусть  $a_1$  — собственный вектор, соответствующий нулевому собственному числу, а  $a_2$  — собственному числу  $i\omega$ . Пусть, как обычно,  $b_j$  — решения соответствующих сопряженных задач, причем  $(a_j, b_j) = 1$ ,  $j = 1, 2$ . В этой ситуации нормирующая замена имеет вид

$$x = \sqrt{\varepsilon}(z_1(\tau)a_1 + z_2(\tau)e^{i\omega t}a_2 + \bar{z}_2(\tau)e^{-i\omega t}\bar{a}_2) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}x_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.67)$$

Как и в предыдущем случае квадратичная нелинейность имеет для этой задачи принципиальное значение и на втором шаге получаем на нее следующие условия:

$$(F_2(a_1, a_1) + F(a_2, \bar{a}_2), b_1) = 0, \quad (F_2(a_1, a_2), b_2) = 0. \quad (1.68)$$

Если  $F_2(x, x) = 0$ , то равенства (1.68) выполнены, и нормальная форма, определяемая из условий разрешимости уравнения при  $\varepsilon^{3/2}$ , принимает вид аналогичный (1.65)

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1 z_1 + (d_{11}z_1^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ z_2' &= \gamma_2 z_2 + (d_{21}z_1^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2, \end{aligned} \quad (1.69)$$

где  $z_1(\tau)$  — вещественная, а  $z_2(\tau)$  — комплексная переменная,  $\gamma_j = (A_1 a_j, b_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $d_{11} = (F_3(a_1, a_1, a_1), b_1)$ ,  $d_{12} = 6(F_3(a_1, a_2, \bar{a}_2), b_1)$ ,  $d_{21} = 3(F_3(a_1, a_1, a_2), b_2)$ ,  $d_{22} = 3(F_3(a_2, \bar{a}_2, a_2), b_2)$ .

Выполним в (1.69) замену  $z_1 = \rho_1$ ,  $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi}$ , тогда для переменных  $\rho_1, \rho_2, \varphi$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \gamma_1 \rho_1 + (d_{11}\rho_1^2 + d_{12}\rho_2^2)\rho_1, \\ \rho_2' &= \operatorname{Re}(\gamma_2)\rho_2 + (\operatorname{Re}(d_{21})\rho_1^2 + \operatorname{Re}(d_{22})\rho_2^2)\rho_2, \\ \varphi' &= \operatorname{Im}(\gamma_2) + \operatorname{Im}(d_{21})\rho_1^2 + \operatorname{Im}(d_{22})\rho_2^2, \end{aligned} \quad (1.70)$$



Нетрудно видеть, что первые два уравнения системы (1.70) не зависят от третьего и могут рассматриваться отдельно. Отметим, что структура этой пары уравнений та же, что и системы (1.65).

Как и в предыдущем случае можно сформулировать следующую задачу.

**Задача 5.** В предположении, что  $F_2(x, x) \neq 0$ , выполните в (1.1) замену

$$x = \varepsilon(z_1(\tau)a_1 + z_2(\tau)e^{i\omega t}a_2 + \bar{z}_2(\tau)e^{-i\omega t}\bar{a}_2) + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (1.71)$$

С помощью замены (1.71) решите следующие задачи:

1. Постройте нормальную форму задачи (1.1).
2. Найдите состояния равновесия полученной нормальной формы и исследуйте их на устойчивость.

### Две пары чисто мнимых собственных чисел без резонансов.

Пусть собственному числу  $i\omega_1$  матрицы  $A_0$  соответствует собственный вектор  $a_1$ , а собственному числу  $i\omega_2$  —  $a_2$ , пусть  $b_1, b_2$  — собственные векторы сопряженной матрицы  $A_0^*$ , отвечающие собственным числам  $-i\omega_1$  и  $-i\omega_2$  соответственно. Как обычно, эти векторы пронормированы так, что  $(a_j, b_j) = 1$ ,  $j = 1, 2$ . Считаем, кроме того, что для  $i\omega_1, i\omega_2$  выполнено условие (1.13) отсутствия старших резонансов. При этих условиях выполним в (1.1) замену

$$x = \sqrt{\varepsilon}(z_1(\tau)e^{i\omega_1 t}a_1 + \bar{z}_1(\tau)e^{-i\omega_1 t}\bar{a}_1 + z_2(\tau)e^{i\omega_2 t}a_2 + \bar{z}_2(\tau)e^{-i\omega_2 t}\bar{a}_2) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}x_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.72)$$

тогда, приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon$ , получаем задачу для определения  $x_1$ , а при  $\varepsilon^{3/2}$  из условий разрешимости задачи для  $x_2$  находим нормальную форму. Нетрудно видеть, что для  $x_1$  имеется следующее уравнение:

$$\dot{x}_1 = A_0 x_1 + F_2(z_1(\tau)e^{i\omega_1 t}a_1 + z_2(\tau)e^{i\omega_2 t}a_2 + \text{к.с.}, z_1(\tau)e^{i\omega_1 t}a_1 + z_2(\tau)e^{i\omega_2 t}a_2 + \text{к.с.}), \quad (1.73)$$

где к.с., как обычно, обозначено комплексно сопряженное выражение. Из (1.73) решение  $x_1$  определяется по формуле

$$x_1(t, \tau) = e^{2i\omega_1 t} z_1^2 w_1 + e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} z_1 z_2 w_2 + e^{2i\omega_2 t} z_2^2 w_3 + e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} z_1 \bar{z}_2 w_4 + \text{к.с.} + |z_1|^2 w_5 + |z_2|^2 w_6, \quad (1.74)$$

где  $w_1 = (2i\omega_1 E - A_0)^{-1} F_2(a_1, a_1)$ ,  $w_2 = 2(i(\omega_1 + \omega_2)E - A_0)^{-1} F_2(a_1, a_2)$ ,  $w_3 = (2i\omega_2 E - A_0)^{-1} F_2(a_2, a_2)$ ,  $w_4 = 2(i(\omega_1 - \omega_2)E - A_0)^{-1} F_2(a_1, \bar{a}_2)$ ,  $w_5 = -2A_0^{-1} F_2(a_1, \bar{a}_1)$ ,  $w_6 = -2A_0^{-1} F_2(a_2, \bar{a}_2)$ ,

Полученное значение  $x_1$  позволяет определить коэффициенты нормальной формы

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1 z_1 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ z_2' &= \gamma_2 z_2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2, \end{aligned} \quad (1.75)$$

относительно комплексных переменных  $z_1(\tau), z_2(\tau)$ . Коэффициенты системы (1.75) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_j &= (A_1 a_j, b_j), \quad j = 1, 2, \quad d_{11} = (2F_2(a_1, w_5) + 2F_2(\bar{a}_1, w_1) + 3F_3(a_1, a_1, \bar{a}_1), b_1), \\ d_{12} &= (2F_2(a_1, w_6) + 2F_2(a_2, w_4) + 2F_2(\bar{a}_2, w_2) + 6F_3(a_1, a_2, \bar{a}_2), b_1), \\ d_{21} &= (2F_2(a_1, \bar{w}_4) + 2F_2(a_2, w_5) + 2F_2(\bar{a}_1, w_2) + 6F_3(a_2, a_1, \bar{a}_1), b_2), \\ d_{22} &= (2F_2(a_2, w_6) + 2F_2(\bar{a}_2, w_3) + 3F_3(a_2, a_2, \bar{a}_2), b_2). \end{aligned}$$

Выполняя в (1.75) полярную замену  $z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}$ , переходим к уравнениям относительно амплитуд и фаз

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \gamma_1^{(1)} \rho_1 + (d_{11}^{(1)} \rho_1^2 + d_{12}^{(1)} \rho_2^2) \rho_1, \\ \rho_2' &= \gamma_2^{(1)} \rho_2 + (d_{21}^{(1)} \rho_1^2 + d_{22}^{(1)} \rho_2^2) \rho_2, \\ \varphi_1' &= \gamma_2^{(2)} + d_{21}^{(2)} \rho_1^2 + d_{22}^{(1)} \rho_2^2, \\ \varphi_2' &= \gamma_2^{(2)} + d_{21}^{(2)} \rho_1^2 + d_{22}^{(1)} \rho_2^2, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где  $\gamma_j = \gamma_j^{(1)} + i\gamma_j^{(2)}$ ,  $d_{jk} = d_{jk}^{(1)} + id_{jk}^{(2)}$ . Учитывая, что первые два уравнения системы (1.76) не зависят от остальных, их можно рассматривать отдельно.

Итак, при сделанных предположениях во всех трех случаях получается по-существу одна и та же система

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varphi_1 \xi_1 + (a_{11} \xi_1^2 + a_{12} \xi_2^2) \xi_1, \\ \xi_2' &= \varphi_2 \xi_2 + (a_{21} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2) \xi_2, \end{aligned} \quad (1.77)$$

где  $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ .

Кратко опишем ее общие свойства при различных значениях параметров. Сразу отметим, что подробное описание свойств системы (1.77) можно найти в книгах [9] и [18].

Начнем с состояний равновесия и их устойчивости. Система (1.77) при любых значениях входящих параметров имеет тривиальное состояние равновесия  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ . Учитывая предположение о том, что собственные числа матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  переходят при  $\varepsilon > 0$  в правую комплексную полуплоскость, считаем, что  $\varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0$ , т.е. нулевое состояние равновесия —

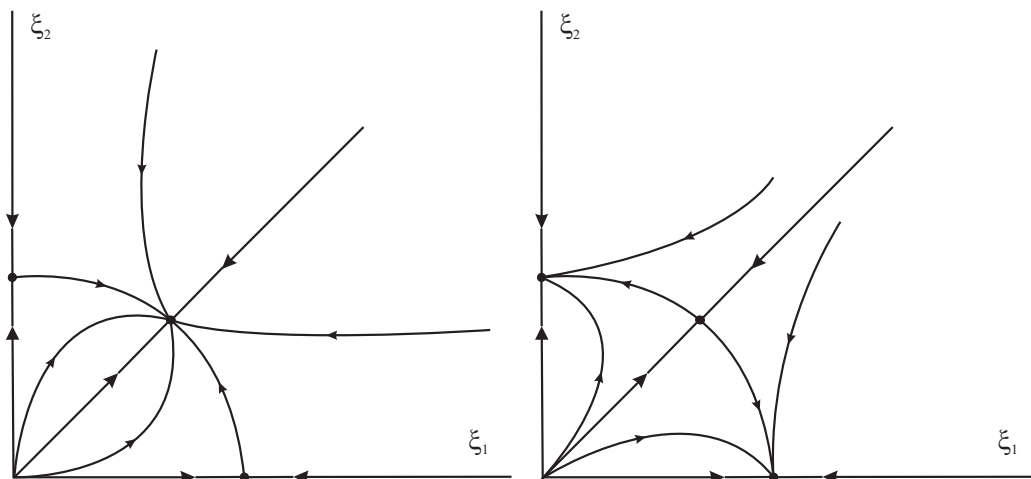


Рис. 1.1.

Рис. 1.2.

неустойчивый узел. Кроме нулевого состояния равновесия у системы (1.77) в первой четверти фазовой плоскости может быть еще три состояния равновесия. Они имеют следующие условия существования и устойчивости:

1. При  $\varphi_2/a_{22} < 0$  существует состояние равновесия

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \sqrt{-\varphi_2/a_{22}}, \quad (1.78)$$

которое устойчиво, если  $\varphi_1 < a_{12}\varphi_2/a_{22}$ .

2. При  $\varphi_1/a_{11} < 0$  существует состояние равновесия

$$\xi_1 = \sqrt{-\varphi_1/a_{11}}, \quad \xi_2 = 0, \quad (1.79)$$

устойчивое, если  $\varphi_2 < a_{21}\varphi_1/a_{11}$ .

3. При  $\Delta_1/\Delta > 0$ ,  $\Delta_2/\Delta > 0$  существует состояние равновесия

$$\xi_1 = \sqrt{\Delta_1/\Delta}, \quad \xi_2 = \sqrt{\Delta_2/\Delta}, \quad (1.80)$$

где  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ,  $\Delta_1 = -\varphi_1a_{22} + \varphi_2a_{12}$ ,  $\Delta_2 = -\varphi_2a_{11} + \varphi_1a_{21}$ .

Состояние равновесия (1.80) устойчиво, если

$$(\varphi_1a_{22}(a_{21} - a_{11}) + \varphi_2a_{11}(a_{12} - a_{22}))/\Delta < 0,$$

$$(a_{12}\varphi_2 - a_{22}\varphi_1)(a_{21}\varphi_1 - a_{11}\varphi_2)/\Delta > 0.$$

Ниже будем считать систему (1.77) диссипативной. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $a_{11} < 0$ ,  $a_{22} < 0$  и при этом либо одно из чисел  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ , было отрицательно, либо  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$  (условие Каменкова).

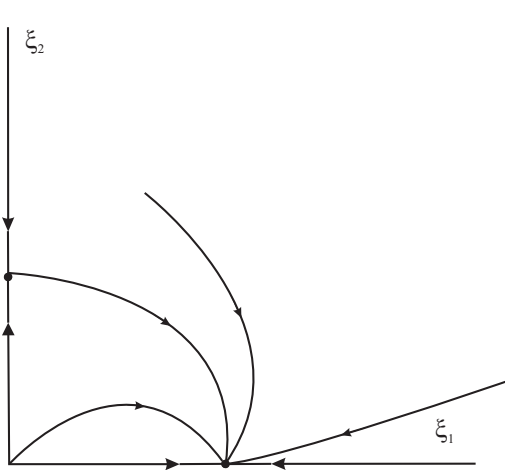


Рис. 1.3.

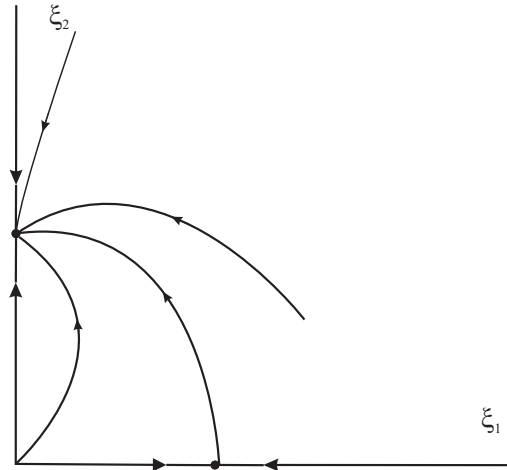


Рис. 1.4.

На рисунках 1.1-1.4 показаны четыре возможных фазовых портрета системы (1.77) при выполнении условия диссипативности и положительных  $\varphi_1, \varphi_2$ . На рис. 1.1 устойчиво состояние равновесия (1.80), которому в исходной задаче (1.1) соответствуют двухчастотные колебания. На остальных рисунках это состояние либо неустойчиво рис. 1.2, либо не существует рис. 1.3-1.4. Устойчивыми в этих случаях являются состояния равновесия (1.78), (1.79), которым в задаче (1.1) соответствует цикл.

Перейдем к случаю коразмерности три и рассмотрим две достаточно трудные задачи.

## 1.6 Резонанс 1:1

Рассмотрим теперь случай резонанса 1:1. Эта ситуация может реализовываться многими разными способами, выберем простейший из них. Вместо одной системы (1.1) рассмотрим две связанные между собой

$$\begin{aligned} u_1' &= \varepsilon D(u_2 - u_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_1 + F(u_1), \\ u_2' &= \varepsilon D(u_1 - u_2) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_2 + F(u_2). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Эта система описывает взаимодействие двух слабо связанных осцилляторов. Нормализация системы (1.81) позволяет выделить амплитудные и фазовые переменные и исследовать характер потери устойчивости однородного ( $u_1(t) \equiv u_2(t)$ ) периодического решения. В работе [19] выделены переменные, определяющие динамику (1.81), и исследованы области бифуркаций циклов, торов и странных аттракторов этой системы.

### 1.6.1 Динамические свойства нормальной формы

Уточним некоторые предположения. Пусть, как и ранее, чисто мнимому собственному числу  $i\omega$  матрицы  $A_0$  соответствует собственный вектор  $a$ , а собственному числу  $-i\omega$  матрицы  $A_0^*$  соответствует собственный вектор  $b$ , пронормируем их так, что  $(a, b) = 1$ . Предположим, что нелинейность  $F(u)$  представляется в виде  $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\|u\|^4)$ , где вектор-функции  $F_2, F_3$  линейны по каждому аргументу. В соответствии с алгоритмами, изложенными выше, система (1.81) может быть сведена к трехмерной системе амплитудных переменных  $\xi_1, \xi_2, \alpha$ . Функции  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  представляют собой медленно меняющиеся амплитуды осцилляторов, а  $\alpha(t)$  — разность фаз между ними. В частности, замена

$$u_j(t) = \xi_j(t) \left( ae^{i\omega\tau_j(t)} + \bar{a}e^{-i\omega\tau_j(t)} \right) + O(\varepsilon),$$

после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и  $\xi$  приводит на третьем шаге к нормальной форме:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varepsilon d \xi_2 \cos(\omega(\tau_2 - \tau_1) + \delta) + [\varepsilon(\phi_0 - d \cos \delta) + d_0 \xi_1^2] \xi_1, \\ \xi_2' &= \varepsilon d \xi_1 \cos(\omega(\tau_2 - \tau_1) - \delta) + [\varepsilon(\phi_0 - d \cos \delta) + d_0 \xi_2^2] \xi_2, \\ \omega\tau_1' &= \omega + \varepsilon(\psi_0 - d \sin \delta) + d\varepsilon \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\omega(\tau_2 - \tau_1) + \delta) + \omega c_0 \xi_1^2, \\ \omega\tau_2' &= \omega + \varepsilon(\psi_0 - d \sin \delta) - d\varepsilon \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\omega(\tau_2 - \tau_1) - \delta) + \omega c_0 \xi_2^2, \end{aligned} \quad (1.82)$$

в которой отброшены члены более высокого порядка малости. В системе (1.82) числа  $\phi_0 = \operatorname{Re}(A_1 a, b)$ ,  $\psi_0 = \operatorname{Im}(A_1 a, b)$  определяются скоростью перехода собственных чисел матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  в правую комплексную полуплоскость,  $d_0 < 0$  и  $c_0$  — соответственно вещественная и мнимая части первой ляпуновской величины (определяются нелинейностью  $F(u)$ ), и, наконец,  $d = |(Da, b)|$ ,  $\cos \delta = \operatorname{Re}(Da, b)/d$  характеризуют связь осцилляторов между собой. Для нахождения ляпуновской величины будем пользоваться формулой (1.56), полученной выше для стандартной бифуркации Андронова-Хопфа.

Простые нормирующие замены  $\xi_j \rightarrow \sqrt{-\varepsilon\phi_0/d_0}\xi_j$ , ( $j = 1, 2$ ),  $\varepsilon\phi_0 t \rightarrow t$  приводят систему (1.82) к виду:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= d\xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - d \cos \delta - \xi_1^2)\xi_1, \\ \xi_2' &= d\xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - d \cos \delta - \xi_2^2)\xi_2, \\ \alpha' &= -d \left[ \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + b(\xi_1^2 - \xi_2^2). \end{aligned} \quad (1.83)$$

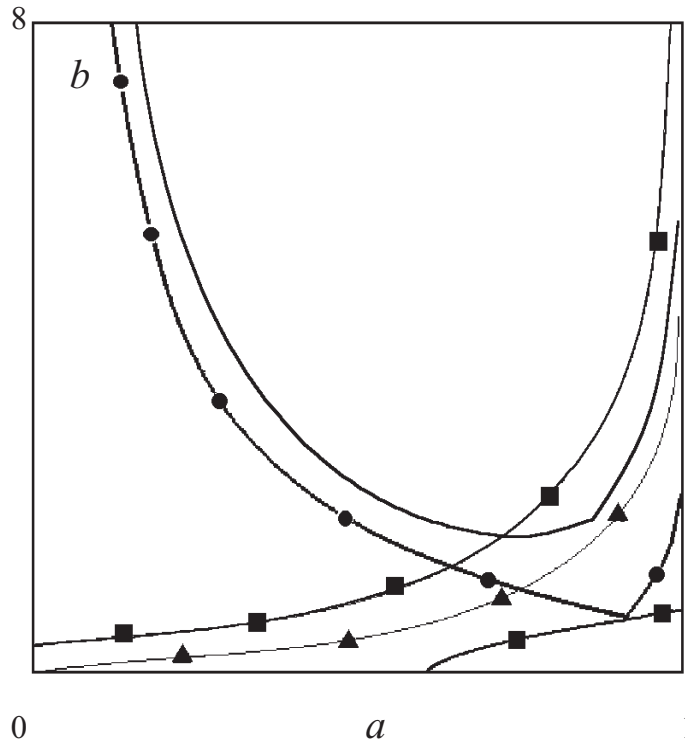


Рис. 1.5. Разбиение плоскости параметров

где  $b = c_0\omega/d_0$  и число  $d/\phi_0$  обозначено снова  $d$ . Рассмотрим поведение системы (1.83) при изменении параметра связи  $d$ . На плоскости параметров  $a = \cos \delta$  и  $b$  можно выделить две области с принципиально разными сценариями качественных изменений динамической системы (1.83). На рис. 1.5 эти области разделяют верхние ветви кривых. Удалось получить бифуркационные значения

$$\begin{aligned}
 d_j &\equiv d_j(a, b), \quad j = -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4; \\
 d_j^S &\equiv d_j^S(a, b), \quad j = 1 \dots \infty; \\
 d_j^A &\equiv d_j^A(a, b), \quad j = 1 \dots \infty; \\
 d_j^H &\equiv d_j^H(a, b), \quad j = 1 \dots \infty,
 \end{aligned}
 \tag{1.84}$$

при которых происходят перестройки фазового портрета исследуемой системы. Отметим свойство симметрии системы (1.83) состоящее в том, что замена

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad \alpha \rightarrow -\alpha
 \tag{1.85}$$

переводит исследуемую систему в себя. Кроме того, фазовое пространство системы (1.83) является цилиндрическим в силу  $2\pi$ -периодичности ее пра-

вых частей по  $\alpha$ . Рассмотрим сценарии фазовых перестроек на примере двух типичных случаев:

- 1)  $a = (1 + \pi^2/4)^{-1/2}, b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$  и
- 2)  $a = 0.5, b = 10,$

при которых реализуются соответственно первый и второй из них. Первый из случаев соответствует паре диффузионно связанных уравнений Хатчинсона:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \varepsilon d(N_2(t) - N_1(t)) + rN_1(t)[1 - N_1(t - h)], \\ \dot{N}_2 &= \varepsilon d(N_1(t) - N_2(t)) + rN_2(t)[1 - N_2(t - h)],\end{aligned}\tag{1.86}$$

при значениях  $rh = \pi/2 + \varepsilon$  (см. [20]). Рассмотрим полученные для этой задачи результаты подробнее.

1. При значениях параметра  $d > d_{-3} \simeq 0.931$  глобально устойчивым является единственное состояние равновесия  $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$  (соответствует пространственно однородному периодическому режиму у исходной системы).
2. При  $d < d_{-3}$  к глобально устойчивому состоянию равновесия  $(1, 1, 0)$  добавляется неустойчивое  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$ , где  $\xi^* = \sqrt{1 - 2da}$  (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы).
3. При уменьшении  $d$  до значения  $d = d_{-2} \simeq 0.544$  из “воздуха” рождаются еще два устойчивых состояния равновесия – точки  $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)$  и  $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)$ , где  $\xi_1^* > \xi_2^*, 0 < \alpha_1^* < \pi/2$ , и два неустойчивых –  $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)$  и  $D = (\eta_2^*, \eta_1^*, -\alpha_2^*)$ , где  $\eta_1^* > \eta_2^*, 0 < \alpha_2^* < \pi/2$ , кроме того,  $\eta_1^* > \xi_1^*, \xi_2^* > \eta_2^*$  (соответствуют не синхронизированным периодическим режимам у исходной системы). Состояния равновесия  $A$  и  $B$  устойчивы при уменьшении параметра  $d$  вплоть до значения  $d_{-1} \simeq 0.524$ . Формулы для определения величин  $\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*$  даются ниже.
4. При  $d = d_{-1}$  состояния  $A$  и  $B$  теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов  $C_A$  и  $C_B$  (бифуркация Андронова-Хопфа). Заметим, что устойчивые периодические решения системы (1.83) соответствуют не синхронизированным квазипериодическим колебаниям системы (1.81).
5. При  $d = d_{кр} \simeq 0.5015$  (критическое для пространственно однородных режимов значение) неустойчивые неподвижные точки  $C$  и  $D$  сливаются с однородным состоянием равновесия и отбирают его устойчивость.

6. При дальнейшем изменении параметра  $d$  устойчивые циклы  $C_A$  и  $C_B$ , родившиеся из точек  $A$  и  $B$ , увеличиваются в размерах до тех пор, пока при  $d = d_1 \simeq 0.481$  не сомкнутся в точке  $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$ . (Обратная бифуркация расщепления сепаратрис.) В результате происходит объединение пары циклов в один  $C_U$ , который, не значительно меняя размеры, остается устойчивым вплоть до значения  $d = d_3 \simeq 0.429$ .
7. При  $d = d_2 \simeq 0.466$  от неустойчивого состояния равновесия в результате бифуркации Андронова-Хопфа  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$  ответвляется неустойчивый цикл  $C_{II}$ , который при  $d = d_3$  сливается с устойчивым циклом  $C_U$  и исчезает.
8. При  $d_3 > d > 0$  система имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$ , соответствующее колебаниям в противофазе.
9. При других значениях  $a, b$ , расположенных в нижней части области параметров (см. рис. 1.5), не происходит существенных изменений в вышеизложенном сценарии. Лишь для точек плоскости, лежащих выше кривой, отмеченной кружками, последняя из описанных бифуркаций упрощается: устойчивый цикл не аннигилирует с неустойчивым, а стягивается при  $d = d_2$  в состояние равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$  – бифуркация Андронова-Хопфа. Кроме того, для точек области, расположенных выше верхней ветви кривой, отмеченной квадратами, при потере устойчивости однородного состояния равновесия  $(1, 1, 0)$  от него ответвляются устойчивые неподвижные точки  $A$  и  $B$ , а докритических устойчивых режимов не существует.

Увеличение параметра  $b$  приводит к существенно иным результатам. Рассмотрим систему (1.82) при  $a = 0.5, b = 10$ . Эти значения  $a$  и  $b$  лежат в области параметров, соответствующих второму сценарию, и дают типичный пример такого рода.

1. Система (1.83) в этом случае ни при каких значениях  $d$  не имеет устойчивых докритических режимов и при  $d > d_{кр} \simeq 8.16$  однородное состояние равновесия  $(1, 1, 0)$  – глобально устойчиво.
2. Уменьшение  $d$  приводит к ответвлению при  $d = d_{кр}$  пары состояний равновесия  $A$  и  $B$ , наследующих устойчивость однородного режима.
3. При  $d_{кр} < d < d_4 \simeq 2.058$  эти состояния равновесия остаются единственными устойчивыми режимами системы.



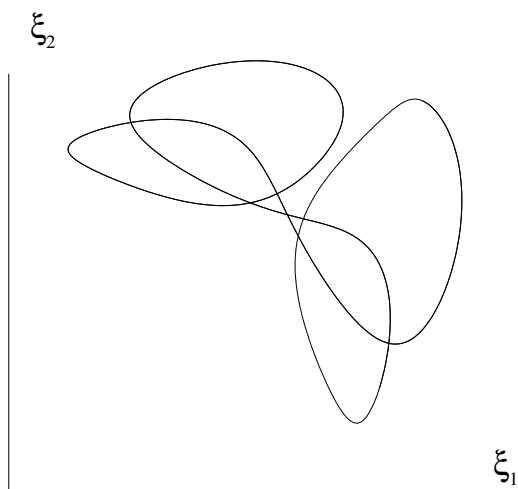


Рис. 1.6. Устойчивый цикл  $C_2^T$  при  $d = 1.5$

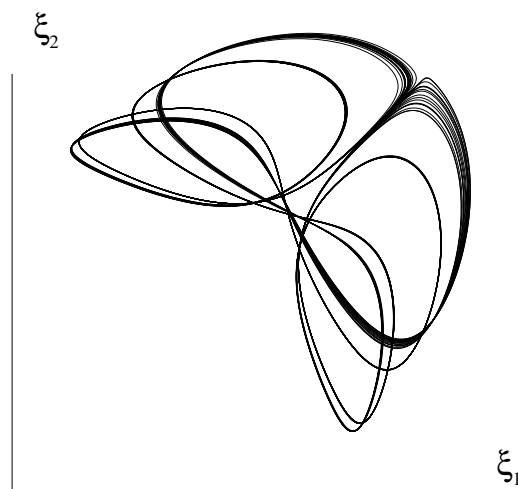


Рис. 1.7. Странный аттрактор  $A_2^S$  при  $d = 1.508$

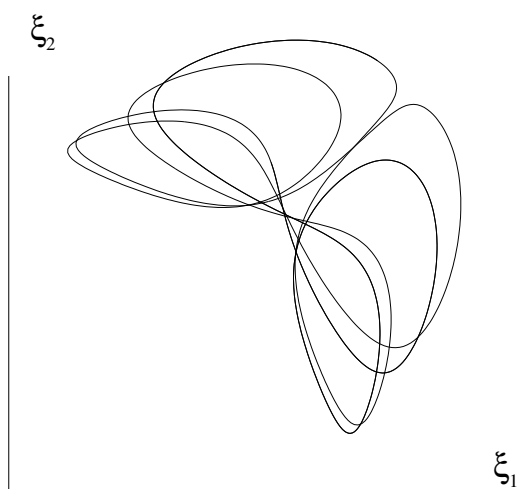


Рис. 1.8. Устойчивый цикл  $C_3^S$  при  $d = 1.51$

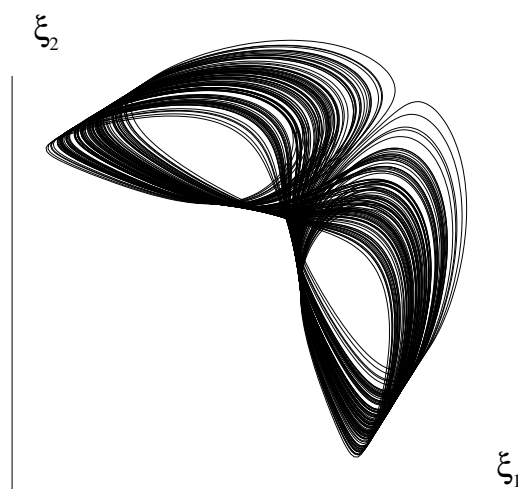


Рис. 1.9. Странный аттрактор  $A_\infty^S$  при  $d = 1.7$

4. При  $d = d_1 \simeq 2.898$  сепаратрисы, выходящие из седлового однородного состояния равновесия  $(1, 1, 0)$ , возвращаются в него, образуя две симметричные петли, из которых при дальнейшем уменьшении  $d$  рождается пара неустойчивых симметричных циклов  $C_A$  и  $C_B$  (расщепление сепаратрис).
5. При  $d = d_4$  неустойчивое многообразие однородного состояния равновесия совпадает с устойчивыми многообразиями неустойчивых предельных циклов  $C_A$  и  $C_B$ . Отметим, что состояния равновесия  $A$  и  $B$  остаются по-прежнему устойчивыми.
6. При  $d < d_4$  фазовая картина резко меняется: колебания становятся неупорядоченными, рождается странный аттрактор.
7. При  $d = d_{-1} \simeq 1.94$  неподвижные точки  $A$  и  $B$  теряют устойчивость в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа: с ними сливаются неустойчивые циклы  $C_A$  и  $C_B$ .

Бифуркации, происходящие с системой (1.83) при  $d_{-1} > d > 0$ , удобнее описывать при возрастающем  $d$ .

8. При  $0 < d < d_3 = 0.5$  глобально устойчиво состояние равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$ .
9. При  $d = d_3$  от состояния равновесия  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$  ответвляется самосимметричный устойчивый цикл  $C_{\Pi}$  (бифуркация Андронова-Хопфа). Под самосимметричностью цикла  $C_{\Pi}$  будем понимать его инвариантность относительно замены  $\xi_1 \rightarrow \xi_2, \xi_2 \rightarrow \xi_1, \alpha \rightarrow 2\pi - \alpha$ .
10. При  $d = d_1^S \simeq 1.4$  указанная симметрия цикла  $C_{\Pi}$  теряется, он расщепляется на два симметричных цикла  $C_1^T, \bar{C}_1^T$  (бифуркация потери симметрии).
11. При  $d = d_{11} \simeq 1.4589, d_{12} \simeq 1.4594 \dots d_{1\infty} \simeq 1.45955$  с каждым из циклов  $C_1^T, \bar{C}_1^T$  происходят бифуркации удвоения периода. В результате при  $d > d_{1\infty}$  имеем два симметричных странных аттрактора  $A_1^T, \bar{A}_1^T$ , возникших по фейгенбаумовскому сценарию.
12. При  $d = d_1^H \simeq 1.4596$  пара симметричных странных аттракторов  $A_1^T, \bar{A}_1^T$  объединяется в один самосимметричный  $A_1^S$ , который при  $d = d_1^A \simeq 1.46$  превращается в самосимметричный двухобходный цикл  $C_1^S$ , условно “двойного” по сравнению с  $C_{\Pi}$  периода.

13. При увеличении  $d$  процесс повторяется: при  $d = d_2^S \simeq 1.5$  теряется симметрия цикла  $C_2^S$ , затем с каждым из пары родившихся циклов  $C_2^T, \bar{C}_2^T$  при  $d = d_{21} \simeq 1.507, d_{22} \simeq 1.5072 \dots d_{2\infty} \simeq 1.5073$  происходят бифуркации удвоения, завершающиеся рождением симметричных странных аттракторов  $A_2^T, \bar{A}_2^T$  и т.д.

Таким образом, имеем каскад бифуркаций странных аттракторов  $A_j^T, \bar{A}_j^T; A_j^S$  и циклов  $C_j^T, \bar{C}_j^T; C_j^S, j = 1, 2 \dots$  типа бифуркаций удвоения периода. Вычислена оценка значения  $d_\infty \simeq 1.53$ , к которому сходятся последовательности  $d_n^H, d_n^A, d_n^S, d_{n\infty}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При описании сценариев для обозначения одинаковых бифуркаций использовались одинаковые номера  $d_j$ . Во втором сценарии последовательность общих бифуркаций изменилась, поэтому приведем цепочку неравенств, связывающих критические значения, в этом случае

$$d_{кр} > d_1 > d_4 > d_{-1} > \dots > d_\infty > \dots > d_{2\infty} > \dots > d_{21} > \\ d_2^S > d_1^A > d_1^H > d_{1\infty} > \dots > d_{11} > d_1^S > d_3 > 0.$$

На рисунках 1.6, 1.8 изображены проекции предельных циклов  $C_1^S$  и  $C_2^S$  системы (1.83) на плоскость  $\alpha = 0$  при значениях  $d = 1.5$  и  $d = 1.51$  соответственно. Масштаб изменений переменных  $\xi_1, \xi_2$  равен 1. Наблюдаемые при  $d_\infty < d < d_3$  неупорядоченные колебания имеют в качестве притягивающего множества странный аттрактор (см. рис. 1.9), более сложной структуры, чем  $A_j^T, \bar{A}_j^T; A_j^S, j = 1, 2 \dots$ . Вычисления показали, что одна из ляпуновских экспонент этого аттрактора положительна, вторая близка к нулю и положительна, а третья – отрицательна. В частности, при  $d = 1.7$  имеем  $\lambda_1 \simeq 0.41, \lambda_2 \simeq 0.00, \lambda_3 \simeq -5.58$  и ляпуновская размерность аттрактора оказывается равной  $d_l \simeq 2.07$ . Первая ляпуновская экспонента аттракторов  $A_j^T, \bar{A}_j^T; A_j^S, j = 1, 2 \dots$ , вычисленная в пробных точках, также положительна, вторая – близка к нулю и отрицательна, а третья – отрицательна и не претерпевает значительных изменений. Например, при  $d = 1.4597$  для аттрактора  $A_1^S$  имеем  $\lambda_1 \simeq 0.17, \lambda_2 \simeq -0.01, \lambda_3 \simeq -5.6, d_l = 2.03$ . Усложнение аттракторов системы (1.83) при варьировании параметра  $d$  определяется, тем самым, увеличением первой из ляпуновских экспонент.

## 1.6.2 Обоснование некоторых результатов

Перейдем к описанию способов получения бифуркационных значений параметра  $d$  при различных  $a$  и  $b$ .

Относительно простым оказалось определение величин  $d_{-3}, d_{-2}, d_{-1}, d_{кр}, d_2$ , связанных с появлением и устойчивостью состояний равновесия системы (1.83). Введем три многочлена:

$$\begin{aligned} G(u) &\equiv 4(2(1 - da) - u)^2 + 16a^2(1 - da)u + \\ &\quad 2d^2(8a^4 - 8a^2 + 1) - 16a^2(1 - da)^2, \\ H(u) &\equiv (2(1 - da) - u)^2 + b^2u^2 - 2d^2(2a^2 - 1), \\ R(u) &\equiv (b^2G(u) - 4a^2H(u))(b^2(2d - H(u) + G(u)) - 8da^2) + \\ &\quad 2d^2(b^2 - 4a^2)^2(2b^2u^2 - H(u)). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Имеет место следующее утверждение технического характера.

**Лемма 2.** *Множество неподвижных точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.82) принадлежит множеству решений алгебраической системы*

$$\begin{aligned} \xi_1^2 \xi_2^2 G(\xi_1^2 + \xi_2^2) &= d^2(\xi_1^4 + \xi_2^4) + 16a^2 \xi_1^4 \xi_2^4, \\ R(\xi_1^2 + \xi_2^2) &= 0, \\ \alpha &= \arctg \left( \frac{(b\xi_2^2 a^2 - (1 - da - \xi_1^2)(1 - a^2))(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{b\xi_2(\xi_1^2 - \xi_2^2)(1 - a^2) - a^2(1 - da - \xi_1^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \right), \end{aligned} \quad (1.88)$$

где многочлены  $G$  и  $R$  определяются по формулам (1.87).

Справедливость леммы может быть проверена непосредственной подстановкой.

Фигурирующий в приведенном утверждении многочлен четвертого порядка по  $u$   $R(u)$  имеет корни  $u = 2$  и  $u = 2 - 4da$ , которые соответствуют состояниям равновесия  $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$  и  $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1 - 2da}, \alpha = \pi$ . Из условия действительности второго из них имеем  $d_{-3} = 1/(2a)$ . После деления многочлена  $R(u)$  на  $u^2 + 4(da - 1)u + 4(1 - 2da)$  получается квадратный трехчлен, корни которого определяют состояния равновесия  $A, B, C, D$

$$\alpha_1(a, b, d)u^2 + \alpha_2(a, b, d)u + \alpha_3(a, b, d), \quad (1.89)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(a, b, d) &= (b^2 - 3)(b^2 - a^2 - a^2b^2), \\ \alpha_2(a, b, d) &= 4((-4a^4(b^2 + 1) + 7a^2b^2 - 3(b^2 - a^2))(1 - ad), \\ \alpha_3(a, b, d) &= d^2(16a^4 - 4a^2b^2 + 3b^2 - 12a^2) + \\ &\quad (4a^4(b^2 + 1) - 7a^2b^2 + 3(b^2 - a^2))(1 - 2ad). \end{aligned}$$

Из положительности дискриминанта многочлена (1.89) получаем значение  $d_{-2}$  как больший корень квадратичного по  $d$  уравнения

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 = 0.$$

Компоненты состояний равновесия  $A, B, C, D$  определяются корнями (1.89) с учетом первого и третьего уравнений системы (1.88) и имеют весьма громоздкий вид, в связи с этим мы их здесь не приводим.

Следующее утверждение позволяет выяснить вопрос о том, в каком случае от состояния равновесия  $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$  ответвляется пара состояний равновесия при  $d > d_{\text{кр}}$ , а при каких – при  $d < d_{\text{кр}}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $(d - d_{\text{кр}})c > 0$ ,

$$\text{где } c = c(a, b) \equiv \left( 2b\sqrt{1 - a^2}(ab^2 - 5a + 2) + 2(3a^2 - 1)(b^2 + 1) \right) / d_{\text{кр}},$$

тогда в достаточно малой окрестности неподвижной точки  $(1, 1, 0)$  имеются два состояния равновесия  $(\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha^*)$  и  $(\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha^*)$ , которые устойчивы при  $d - d_{\text{кр}} < 0$  и  $c < 0$  и неустойчивы при  $d - d_{\text{кр}} > 0$  и  $c > 0$ . Величины  $\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha^*$  допускают при  $|d - d_{\text{кр}}| \ll 1$  асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= 1 + \sqrt{(d - d_{\text{кр}})/c} + O(d - d_{\text{кр}}), \\ \xi_2^* &= 1 - \sqrt{(d - d_{\text{кр}})/c} + O(d - d_{\text{кр}}), \\ \alpha^* &= -2(1 + da)\sqrt{\frac{d - d_{\text{кр}}}{c(1 - a^2)}} + O(d - d_{\text{кр}}). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Утверждение леммы получается путем разложения правых частей системы (1.83) в ряд по степеням  $\sqrt{|d - d_{\text{кр}}|}$ . При этом первый коэффициент разложения  $1/c$  определяется из условий разрешимости алгебраической системы на третьем шаге при  $|d - d_{\text{кр}}|^{3/2}$ .

В соответствии с леммой 3 уравнение

$$c(a, b) = 0, \quad (1.91)$$

определяет на плоскости параметров  $a, b$  кривую, разделяющую ее на две области. В верхней расположены такие значения  $a, b$ , что система (1.83) не имеет при  $d - d_{\text{кр}} > 0$  устойчивых состояний равновесия кроме  $(1, 1, 0)$ , а для значений  $a, b$  из нижней области такие состояния равновесия имеются. На рисунке 1.5 кривая, удовлетворяющая уравнению (1.91), отмечена квадратами.

Перейдем к условиям устойчивости состояний равновесия, с помощью которых определяются величины  $d_{-1}, d_{кр}, d_2$ . Условия устойчивости неподвижной точки  $(1, 1, 0)$  дают

$$d_{кр} = -a + b\sqrt{1 - a^2}.$$

По смыслу рассматриваемой задачи  $d_{кр} > 0$ , кроме того, при  $d > d_{кр}$  состояние равновесия  $(1, 1, 0)$  не должно терять устойчивость. Эти условия дают кривую, отмеченную на рис. 1.5 треугольниками, и неравенства  $b > 0$  и  $a > 0$ .

Условия устойчивости точки  $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1 - 2da}, \alpha = \pi$  позволят определить  $d_2 = 1/(4a)$  так, что при  $d > d_2$  данная неподвижная точка неустойчива, а при  $d < d_2$  – устойчива.

Наконец, из условий устойчивости состояний равновесия  $A$  и  $B$  получаем  $d_{-1}$ .

Потеря устойчивости состояниями равновесия  $A, B$  и  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$  происходит колебательным образом, и для того чтобы определить, какие при этом появляются режимы, следует найти ляпуновскую величину в этой точке. Применяя формулы (1.56), для системы (1.83) в случае различных состояний равновесия, получаем значения комплексной ляпуновской величины. На рис. 1.5 кривая, отмеченная кружками, соответствует значениям параметров, при которых вещественная часть ляпуновской величины, вычисленной в точке  $(\xi^*, \xi^*, \pi)$ , обращается в нуль, тем самым, при значениях  $a, b$  выше этой кривой происходит рождение устойчивого цикла ( $d > d_2$ ), а ниже кривой – неустойчивого ( $d < d_2$ ). В свою очередь, непомеченная кривая определяет аналогичные условия для состояний равновесия  $A, B$ .

Основной результат данного пункта состоит в том, что верхние ветви приведенных на рис. 1.5 кривых разделяют хаотический и нехаотический сценарии фазовых перестроек. Обоснование данного результата возможно лишь с применением численных методов.

В заключение заметим, что хаотические режимы возникают в изучаемой динамической системе при достаточно больших значениях параметра  $b$ , который пропорционален мнимой части ляпуновской величины и обратно пропорционален вещественной части. Комплексная ляпуновская величина  $d_0 + i\omega c_0$ , как известно, определяет амплитуду и поправку к частоте однородного периодического режима. Это показывает, что неупорядоченность колебаний носит здесь фазовый характер.

## 1.7 Резонанс 1:2

Уточним постановку задачи. Пусть матрица  $A_0$  имеет две пары чисто мнимых собственных значений  $\pm\omega_0, \pm 2\omega_0$ , где  $\omega_0 > 0$ . Пусть матрица  $A_1$  выбрана так, что собственные числа матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  переходят при  $\varepsilon > 0$  в правую комплексную полуплоскость. Считаем нелинейность, стоящую в правой части системы (1.1), зависящей от  $\varepsilon$  так, что

$$F(x) = F(x, \varepsilon) = F_2(x, x, \varepsilon) + F_3(x, x, x), \quad (1.92)$$

где, как и ранее,  $F_2(x, x, \varepsilon)$  — билинейная форма,  $F_3(x, x, x)$  — трилинейная форма.

Задача естественным образом разбивается на три различных по свойствам подслучая:

1.  $F_2(x, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} F_{21}(x, x)$ ,
2.  $F_2(x, x, \varepsilon) = F_{20}(x, x) + \sqrt{\varepsilon} F_{21}(x, x)$
2.  $F_2(x, x, \varepsilon) = F_{20}(x, x) + \varepsilon F_{21}(x, x)$ .

На четырехмерном устойчивом интегральном многообразии системы (1.1) требуется построить нормальную форму и изучить поведение её решений. Это позволит изучить бифуркации, происходящие в системе (1.1) при  $\varepsilon > 0$  в некоторой окрестности точки 0 её фазового пространства. Как обычно, в силу устойчивости интегрального многообразия грубым режимам нормальной формы будут соответствовать аналогичные режимы изучаемой системы.

Введем в рассмотрение собственные векторы  $a_j, b_j, j = 1, 2$ , матрицы  $A_0$ , соответствующие критическим собственным значениям:

$$A_0 a_1 = i\omega_0 a_1, \quad A_0 a_2 = 2i\omega_0 a_2, \quad A_0^* a_1 = -i\omega_0 a_1, \quad A_0^* a_2 = -2i\omega_0 a_2,$$

нормированные условиями  $(a_k, b_j) = \delta_{kj}$ , где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера, а  $(*, *)$  — евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{C}^n$ .

Для приведения системы (1.1) к нормальной форме ниже нам потребуются условия разрешимости линейной задачи

$$\dot{u} = A_0 u + v \exp(i\omega_0 t) + w \exp(2i\omega_0 t) \quad (1.93)$$

в классе  $2\pi/\omega_0$ -периодических функций. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 4.** *Для разрешимости задачи (1.93) в классе  $2\pi/\omega_0$ -периодических функций необходимо и достаточно, чтобы*

$$(v, b_1) = 0, \quad (w, b_2) = 0. \quad (1.94)$$

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

### 1.7.1 Нормальная форма в случае малости квадратичной нелинейности

Рассмотрим случай  $F_2(x, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}F_{21}(x, x)$ . В соответствии с основным алгоритмом будем искать решение системы (1.1) в виде

$$\begin{aligned} x(t, s) = \sqrt{\varepsilon} \Big[ & (z_1(s) \exp(i\omega_0 t) a_1 + \bar{z}_1(s) \exp(-i\omega_0 t) \bar{a}_1) + \\ & + (z_2(s) \exp(2i\omega_0 t) a_2 + \bar{z}_2(s) \exp(-2i\omega_0 t) \bar{a}_2) \Big] + \\ & + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \dots, \quad (1.95) \end{aligned}$$

где  $s = \varepsilon t$  — медленное время, а  $z_1(s)$ ,  $z_2(s)$ ,  $u_1(t, s)$ ,  $u_2(t, s)$  — подлежащие определению  $2\pi/\omega_0$ -периодические по  $t$  функции.

Подставим замену (1.95) в уравнение (1.1) и в полученной подстановке

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} \left[ i\omega_0 (z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 - \bar{z}_1(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1) + 2i\omega_0 (z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 - \bar{z}_2(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) \right] + \\ & + \varepsilon^{3/2} \left[ (z_1'(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \bar{z}_1'(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1) + (z_2'(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \bar{z}_2'(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) \right] + \\ & + \varepsilon (\dot{u}_1(t, s) + \varepsilon u_1'(t, s)) + \varepsilon^{3/2} (\dot{u}_2(t, s) + \varepsilon u_2'(t, s)) + \dots = \\ & = (A_0 + \varepsilon A_1) x(t, s) + \sqrt{\varepsilon} F_{21}(x(t, s), x(t, s)) + F_3(x(t, s), x(t, s), x(t, s)) \end{aligned}$$

приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  (штрихом обозначена производная по  $s$ , точкой — производная по  $t$ ).

При  $\sqrt{\varepsilon}$ , очевидно, получаем верное тождество.

При  $\varepsilon$  имеем систему

$$\dot{u}_1 = A_0 u_1, \quad (1.96)$$

и функцию  $u_1(t, s)$  можно выбрать тождественно равной нулю.

Наконец, при  $\varepsilon^{3/2}$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} & (z_1'(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \bar{z}_1'(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1) + (z_2'(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \bar{z}_2'(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) + \dot{u}_2 = \\ & = A_0 u_2 + A_1 \left( (z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \bar{z}_1(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1) + (z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \bar{z}_2(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) \right) + \\ & + F_{21} \left( z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.}, z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.} \right) + \\ & + F_3 \left( z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.}, z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \right. \\ & \quad \left. + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.}, z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.} \right). \end{aligned}$$



Приравнивая коэффициенты при резонансных гармониках  $\exp(i\omega_0 t)$  и  $\exp(2i\omega_0 t)$ , из условий разрешимости в классе  $2\pi/\omega_0$ -периодических функций (см. лемма 4) получаем систему дифференциальных уравнений в комплексном виде относительно неизвестных  $z_1(s)$  и  $z_2(s)$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (i\sigma_1 + \gamma_1)z_1 + \chi_1 \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ \dot{z}_2 &= (i\sigma_2 + \gamma_2)z_2 + \chi_2 z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2,\end{aligned}\tag{1.97}$$

где  $\gamma_j = (A_1 a_j, b_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$\chi_1 = (F_{21}(\bar{a}_1, a_2) + F_{21}(a_2, \bar{a}_1), b_1), \quad \chi_2 = (F_{21}(a_1, a_1), b_2),$$

$$d_{11} = (F_3(a_1, a_1, \bar{a}_1) + F_3(a_1, \bar{a}_1, a_1) + F_3(\bar{a}_1, a_1, a_1), b_1),$$

$$\begin{aligned}d_{12} &= (F_3(a_1, a_2, \bar{a}_2) + F_3(a_2, a_1, \bar{a}_2) + F_3(a_1, \bar{a}_2, a_2) + \\ &\quad + F_3(a_2, \bar{a}_2, a_1) + F_3(\bar{a}_2, a_1, a_2) + F_3(\bar{a}_2, a_2, a_1), b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{21} &= (F_3(a_2, a_1, \bar{a}_1) + F_3(a_1, a_2, \bar{a}_1) + F_3(a_2, \bar{a}_1, a_1) + \\ &\quad + F_3(a_1, \bar{a}_1, a_2) + F_3(\bar{a}_1, a_2, a_1) + F_3(\bar{a}_1, a_1, a_2), b_2)\end{aligned}$$

$$d_{22} = (F_3(a_2, a_2, \bar{a}_2) + F_3(a_2, \bar{a}_2, a_2) + F_3(\bar{a}_2, a_2, a_2), b_2).$$

Для дальнейшего анализа системы (1.97) перейдем к полярным координатам  $z_j = \xi_j \exp(i\varphi_j)$ ,  $j = 1, 2$ , где  $\xi_j$  — амплитуды колебаний, а  $\varphi_j$  — фазы колебаний. Выделяя действительную и мнимую части уравнений, в итоге замены получаем четырехмерную систему с действительными переменными

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \operatorname{Re} \gamma_1 \xi_1 + |\chi_1| \xi_1 \xi_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_1 + \delta_1) + (\operatorname{Re} d_{11} \xi_1^2 + \operatorname{Re} d_{12} \xi_2^2) \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \operatorname{Re} \gamma_2 \xi_2 + |\chi_2| \xi_2 \xi_1 \cos(2\varphi_1 - \varphi_1 - \delta_2) + (\operatorname{Re} d_{21} \xi_1^2 + \operatorname{Re} d_{22} \xi_2^2) \xi_2, \\ \dot{\varphi}_1 &= \operatorname{Im} \gamma_1 - |\chi_1| \xi_2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_1 + \delta_1) + \operatorname{Im} d_{11} \xi_1^2 + \operatorname{Im} d_{12} \xi_2^2, \\ \dot{\varphi}_2 &= \operatorname{Im} \gamma_2 - |\chi_2| \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(2\varphi_1 - \varphi_1 - \delta_2) + \operatorname{Im} d_{21} \xi_1^2 + \operatorname{Im} d_{22} \xi_2^2.\end{aligned}\tag{1.98}$$

Здесь  $\delta_j$  — аргументы комплексных чисел  $\chi_j$  — соответственно.

Введем в рассмотрение разность фаз  $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_1$ . Тогда от четырехмерной системы отщепляется трехмерная система, в которой выделены амплитудные и фазовые переменные

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \gamma_{11} \xi_1 + k_1 \xi_1 \xi_2 \cos(\psi + \delta_1) + (b_{11} \xi_1^2 + b_{12} \xi_2^2) \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \gamma_{21} \xi_2 + k_2 \xi_2 \xi_1 \cos(\psi - \delta_2) + (b_{21} \xi_1^2 + b_{22} \xi_2^2) \xi_2, \\ \dot{\psi} &= \delta - 2k_1 \xi_2 \sin(\psi + \delta_1) - k_2 \xi_2 \sin(\psi - \delta_2) + c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2,\end{aligned}\tag{1.99}$$

где  $\gamma_{j1} = \operatorname{Re} \gamma_j$ ,  $b_{jm} = \operatorname{Re} d_{jm}$ ,  $c_j = 2 \operatorname{Im} d_{1j} - \operatorname{Im} d_{2j}$ ,  $k_j = |\chi_j|$ ,  $j = 1, 2$ ,  $m = 1, 2$ ,  $\delta = 2 \operatorname{Im} \gamma_1 - \operatorname{Im} \gamma_2$ .

**Задача 6.** Найти состояния равновесия системы (1.99) и исследовать их на устойчивость.

**Задача 7.** При фиксированных значениях параметров численно построить устойчивые траектории системы (1.99).

**Задача 8.** Изучить численными методами изменения фазового портрета системы (1.99) при изменении одного из ее параметров и фиксированных остальных.

## 1.7.2 Нормальная форма в случае, если квадратичная нелинейность зависит от $\sqrt{\varepsilon}$

В случае выбора нелинейности  $F_2(x, x, \varepsilon)$  в виде  $F_2(x, x, \varepsilon) = F_{20}(x, x) + \sqrt{\varepsilon} F_{21}(x, x)$  необходимо потребовать выполнения дополнительных условий, накладываемых на  $F_{20}(x, x)$ :

$$(F_{20}(\bar{a}_1, a_2) + F_{20}(a_2, \bar{a}_1), b_1) = 0, \quad (F_{20}(a_1, a_1), b_2) = 0. \quad (1.100)$$

При этом для построения нормальной формы, как и в предыдущем случае в системе (1.1) следует выполнить замену (1.95) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$ . На первом шаге выполнения алгоритма, очевидным образом, получаем при  $\sqrt{\varepsilon}$  верное тождество.

Далее при  $\varepsilon$  имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 = A_0 u_1 + F_{20}(z_1 \exp(i\omega_0 t) a_1 + z_2 \exp(2i\omega_0 t) a_2 + \\ + \text{к.с.}, z_1 \exp(i\omega_0 t) a_1 + z_2 \exp(2i\omega_0 t) a_2 + \text{к.с.}). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Отметим, что условия (1.100) обеспечивают разрешимость данной системы в классе периодических функций. Из (1.101) функция  $u_1$  определяется в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 = w_{01} |z_1|^2 + w_{02} |z_2|^2 + (w_1 \bar{z}_1 z_2 \exp(i\omega_0 t) + w_2 z_1^2 \exp(2i\omega_0 t) + \\ + w_3 z_1 z_2 \exp(3i\omega_0 t) + w_4 z_2^2 \exp(4i\omega_0 t) + \text{к.с.}), \end{aligned} \quad (1.102)$$

где  $w_{01}, w_{02}, w_3, w_4$  определяются однозначно:

$$w_{0j} = -A_0^{-1} (F_{20}(\bar{a}_1, a_1) + F_{20}(a_1, \bar{a}_1)), \quad j = 1, 2,$$

$$w_3 = (3i\omega_0 E - A_0)^{-1} (F_{20}(a_1, a_2) + F_{20}(a_2, a_1)), \quad w_4 = (4i\omega_0 E - A_0)^{-1} F_{20}(a_2, a_2),$$

а для  $w_1$  и  $w_2$  имеем следующие вырожденные задачи:

$$\begin{aligned} (i\omega_0 E - A_0)w_1 &= F_{20}(\bar{a}_1, a_2) + F_{20}(a_2, \bar{a}_1), \\ (2i\omega_0 E - A_0)w_2 &= F_{20}(a_1, a_1), \end{aligned} \quad (1.103)$$

Выполнение условий (1.100) позволяет получить решение данных задач с точностью до произвольных постоянных:

$$w_1 = w_1^* + c_1 a_1, \quad w_2 = w_2^* + c_2 a_2. \quad (1.104)$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  выбираются из условий ортогональности  $(w_j, b_j) = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Из условий разрешимости задачи, получающейся при  $\varepsilon^{3/2}$ , имеем ту же систему (1.97), что была и в предыдущем случае, при этом коэффициенты  $\gamma_j, \chi_j, j = 1, 2$  остаются прежними, а остальные коэффициенты принимают вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= (F_{20}(a_1, w_{01}) + F_{20}(w_{01}, a_1) + F_{20}(\bar{a}_1, w_2) + F_{20}(w_2, \bar{a}_1) + \\ &\quad + F_3(a_1, a_1, \bar{a}_1) + F_3(a_1, \bar{a}_1, a_1) + F_3(\bar{a}_1, a_1, a_1), b_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{12} &= (F_{20}(a_1, w_{02}) + F_{20}(w_{02}, a_1) + F_{20}(a_2, \bar{w}_1) + F_{20}(\bar{w}_1, a_2) + \\ &\quad + F_{20}(\bar{a}_2, w_3) + F_{20}(w_3, \bar{a}_2) + F_3(a_1, a_2, \bar{a}_2) + F_3(a_2, a_1, \bar{a}_2) + F_3(a_1, \bar{a}_2, a_2) + \\ &\quad + F_3(a_2, \bar{a}_2, a_1) + F_3(\bar{a}_2, a_1, a_2) + F_3(\bar{a}_2, a_2, a_1), b_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= (F_{20}(a_1, w_1) + F_{20}(w_1, a_1) + F_{20}(\bar{a}_1, w_3) + F_{20}(w_3, \bar{a}_1) + \\ &\quad + F_{20}(a_2, w_{01}) + F_{20}(w_{01}, a_2) + F_3(a_1, a_2, \bar{a}_2) + F_3(a_2, a_1, \bar{a}_2) + \\ &\quad + F_3(a_1, \bar{a}_2, a_2) + F_3(a_2, a_1, \bar{a}_1) + F_3(a_1, a_2, \bar{a}_1) + F_3(a_2, \bar{a}_1, a_1) + \\ &\quad + F_3(a_1, \bar{a}_1, a_2) + F_3(\bar{a}_1, a_2, a_1) + F_3(\bar{a}_1, a_1, a_2), b_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{22} &= (F_{20}(a_2, w_{02}) + F_{20}(w_{02}, a_2) + F_{20}(\bar{a}_2, w_4) + \\ &\quad + F_3(a_2, a_2, \bar{a}_2) + F_3(a_2, \bar{a}_2, a_2) + F_3(\bar{a}_2, a_2, a_2), b_2), \end{aligned}$$

### 1.7.3 Нормальная форма в случае произвольной квадратичной нелинейности

Пусть теперь  $F_2(x, x, \varepsilon) = F_{20}(x, x) + \varepsilon F_{21}(x, x)$ .

В этом случае решение системы (1.1) будем искать в виде

$$x(t, s) = \varepsilon \left[ (z_1(s) \exp(i\omega_0 t) a_1 + \bar{z}_1(s) \exp(-i\omega_0 t) \bar{a}_1) + \right. \\ \left. + (z_2(s) \exp(2i\omega_0 t) a_2 + \bar{z}_2(s) \exp(-2i\omega_0 t) \bar{a}_2) \right] + \\ + \varepsilon^2 u_1(t, s) + \varepsilon^3 u_2(t, s) + \dots, \quad (1.105)$$

где, как и ранее,  $s = \varepsilon t$  — медленное время, а  $z_1(s)$ ,  $z_2(s)$ ,  $u_1(t, s)$ ,  $u_2(t, s)$  — подлежащие определению  $2\pi/\omega_0$ -периодические по функции.

Подставим замену (1.105) в уравнение (1.1), получим следующее выражение:

$$\varepsilon \left[ i\omega_0 (z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 - \bar{z}_1(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1) + 2i\omega_0 (z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 - \bar{z}_2(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) \right] + \\ + \varepsilon^2 \left[ (z_1'(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \bar{z}_1'(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1) + (z_2'(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \bar{z}_2'(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) \right] + \\ + \varepsilon^2 (\dot{u}_2(t, s) + \varepsilon u_2'(t, s)) + \varepsilon^3 (\dot{u}_2(t, s) + \varepsilon u_2'(t, s)) + \dots = \\ = (A_0 + \varepsilon A_1) x(t, s) + F_{20}(x(t, s), x(t, s)) + \\ + \varepsilon F_{21}(x(t, s), x(t, s)) + F_3(x(t, s), x(t, s), x(t, s)).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

При  $\varepsilon$  имеем, очевидно, верное тождество, а при  $\varepsilon^2$  получаем уравнение

$$z_1'(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \bar{z}_1'(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1 + z_2'(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \bar{z}_2'(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2 + \dot{u}_2 = \\ = A_0 u_2 + A_1 (z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + \bar{z}_1(s) e^{-i\omega_0 t} \bar{a}_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \bar{z}_2(s) e^{-2i\omega_0 t} \bar{a}_2) + \\ + F_{20}(z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.}, z_1(s) e^{i\omega_0 t} a_1 + z_2(s) e^{2i\omega_0 t} a_2 + \text{к.с.}).$$

Из условий разрешимости полученной системы в классе  $2\pi/\omega_0$ -периодических функций получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно комплексных переменных  $z_1(s)$  и  $z_2(s)$ :

$$z_1' = \alpha_1 z_1 + \beta_1 \bar{z}_1 z_2, \\ z_2' = \alpha_2 z_2 + \beta_2 \bar{z}_1^2, \quad (1.106)$$

Здесь  $\alpha_1 = (A_1 a_1, b_1)$ ,  $\alpha_2 = (A_1 a_2, b_2)$ ,  $\beta_1 = (F_{20}(\bar{a}_1, a_2) + F_{20}(a_2, \bar{a}_1), b_1)$ ,  $\beta_2 = (F_{20}(a_1, a_1), b_2)$ .

**Задача 9.** Изучить качественное поведение системы (1.106) при различных значениях входящих параметров.

**Задача 10.** Построить следующее по порядку малости приближение нормальной формы (1.106).

## Глава 2

# Алгоритмы нормализации отображений

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим распространение алгоритма нормализации, изложенного в первой главе, на отображения.

Как и в [24], рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  отображение

$$u \rightarrow A_0 u + \varepsilon A_1 u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u), \quad (2.1)$$

определяющее вектор  $u(t+1)$ , через  $u(t)$ . Здесь  $u(t)$  при каждом  $t$  лежит в  $R^n$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  — малый параметр,  $A_0$  —  $n \times n$  вещественная матрица, имеющая  $m$  пар собственных чисел на единичной окружности комплексной плоскости так, что  $A_0 a_k = e^{i\omega_k} a_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Остальные собственные числа  $A_0$  лежат внутри единичного круга. Будем считать, что  $F_2(u, u)$  и  $F_3(u, u, u)$  — линейные по каждому своему аргументу функции, определяющие квадратичную и кубическую нелинейности правой части.

### 2.2 Нормализация отображений

При сделанных допущениях в окрестности нулевой неподвижной точки отображение (2.1) имеет  $2m$ -мерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие [21, 22], что позволяет свести задачу к  $2m$ -мерной. Напомним, что в [23] известный метод Пуанкаре-Ляпунова применен к построению интегрального многообразия в окрестности цикла и системы обыкновенных дифференциальных уравнений на нем, причем последняя

строится сразу в нормальной форме Пуанкаре-Дюлака. Ниже этот прием распространяется на случай, когда мы интересуемся структурой окрестности неподвижной точки отображения.

В ряде случаев локальный анализ отображений в окрестности неподвижной точки удобнее производить путем сведения исследуемого объекта к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (некоторые из этих случаев представлены в работе [16]). Опишем основную конструкцию общего вида, позволяющую получить нормальную форму отображения в виде системы дифференциальных уравнений, и приведем содержательный пример ее использования.

Выполним в (2.1) замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon}u_0(t, s) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2}u_2(t, s) + \varepsilon^2 u_3(t, s) + \varepsilon^{5/2}u_4(t, s) + \dots, \quad (2.2)$$

где  $u_0(t, s) = \sum_{k=1}^m (\xi_k(s) \exp(i\omega_k t) a_k + \bar{\xi}_k(s) \exp(-i\omega_k t) \bar{a}_k)$ ,  $s = \varepsilon t$ . Приравнение коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  приводит на третьем шаге к уравнению

$$\begin{aligned} u_2(t+1, s) - A_0 u_2(t, s) = & - \sum_{k=1}^m \left( \dot{\xi}_k(s) \exp(i\omega_k(t+1)) a_k + \right. \\ & \left. + \dot{\bar{\xi}}_k(s) \exp(-i\omega_k(t+1)) \bar{a}_k \right) + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) + A_1 u_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В зависимости от того, какие резонансные соотношения связывают  $\omega_k$ , могут быть получены различные условия разрешимости задачи (2.3), ясно, однако, что эти соотношения будут включать следующие слагаемые:

$$\dot{\xi}_k = \gamma_k \xi_k + \xi_k \sum_{j=1}^m d_{kj} |\xi_j|^2 + \dots, \quad (2.4)$$

где  $\gamma_k, d_{kj}$  – числа, определяемые правыми частями (2.1). Грубым режимам системы (2.4) будут соответствовать решения (2.1) той же устойчивости с асимптотикой (2.2).

## 2.3 Отображение, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов

### 2.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим применение приведенного алгоритма на примере следующего отображения, порождаемого системой трех связанных *RCLG*-генераторов:

$$\begin{cases} v_j(t+1) = w_j(t) \\ w_j(t+1) = -(1-\varepsilon)v_j(t) - \varphi(Kw_j(t)) + \nu\varphi'(Kw_j(t))\varphi(Kw_{j-1}(t)), \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $v_0 = v_3$ ,  $w_0 = w_3$ ,  $\varepsilon$  и  $\nu$  — малые параметры,  $K$  — некоторое число. Относительно функции  $\varphi(z)$  предполагается, что  $\varphi'(z) > 0$  при всех  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 1$  и, кроме того, выполнены следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\rightarrow q_1 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad \varphi(z) \rightarrow -q_2 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \\ z\varphi'(z) &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

где  $q_1, q_2 > 0$ . Учитывая, что ниже будут изучаться локальные свойства системы (2.5), считаем, что в окрестности точки ноль  $\varphi(z)$  допускает следующее разложение:

$$\varphi(z) = z - az^3 + bz^5 + \dots \quad (2.6)$$

Простейший пример удовлетворяющей указанным условиям функции дает выражение  $\varphi(z) = z(1+z^2)^{-1/2}$ , для которого  $a = 1/2$ ,  $b = 3/8$ .

Матрица линейной части системы (2.5) имеет при  $0 < K < 2$  и  $\varepsilon = 0$  пару собственных чисел  $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0)$ , где  $\omega_0 = \arccos(-K/2)$ , кратности три, которая лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Учитывая, что этим собственным числам соответствует столько линейно независимых собственных векторов какова их кратность, можно утверждать, что при достаточно малых  $\varepsilon$  в окрестности нулевой неподвижной точки системы (2.5) имеется 6-мерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие (см. [24], [29]). Используя изложенный алгоритм, построим нормальную форму отображения (2.5) и изучим ее динамические свойства.

### 2.3.2 Нормальная форма отображения

Обозначим  $u(t)$  шестимерный вектор вида  $(v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3)^T$  и будем считать, что  $\nu = \varepsilon\nu_0$ , тогда для нормализации системы разностных уравнений (2.5) можно выполнить замену (2.2). На третьем шаге применения

алгоритма из условий разрешимости соответствующей алгебраической задачи на  $u_2(t, s)$  получаем

$$\dot{\xi}_j = -id(e^{-i\omega_0}\xi_j + 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}), \quad \xi_0 = \xi_3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

где  $d = \frac{1}{2\sin\omega_0}$ . Нормальная форма (2.7) может быть уточнена на пятом шаге слагаемыми порядка  $\varepsilon$ , на седьмом — порядка  $\varepsilon^2$  и т.д. Предполагая, что

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= -id(e^{-i\omega_0}\xi_j - 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}) + \varepsilon\Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}), \\ \xi_0 &= \xi_3, \quad \xi_{-1} = \xi_2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.8)$$

из условий разрешимости системы, возникающей при  $\varepsilon^{5/2}$  для  $u_3(t, s)$  получаем функцию добавки

$$\begin{aligned} \varepsilon\Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}) &= \frac{\varepsilon}{2}d^2 \left[ e^{-2i\omega_0}\xi_j + 3aK^3(3e^{-i\omega_0} - e^{i\omega_0})\xi_j|\xi_j|^2 + \right. \\ &+ \nu_0K\xi_{j-1}(2e^{-i\omega_0} + 3aK^2(K + 4i\sin\omega_0)(2|\xi_j|^2 + |\xi_{j-1}|^2)) - \\ &- 3\nu_0aK^3(K - 4i\sin\omega_0)\xi_j^2\bar{\xi}_{j-1} + K\nu_0^2\xi_{j-2}(K + 4i\sin\omega_0) + \\ &\left. + K^5 \left( 9a^2K + 4i \frac{(3a^2K + 5b(K + 2\cos 3\omega_0))\sin\omega_0}{K + 2\cos 3\omega_0} \right) \xi_j|\xi_j|^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Принимая во внимание развитую в [24] общую теорию, можно показать, что грубым режимам систем (2.7) или (2.8) соответствуют решения системы (2.5) с асимптотикой (2.2) той же устойчивости. Тем самым возникает задача качественного анализа этих систем. Рассмотрим сначала систему (2.7) и в целях ее упрощения выполним замену  $\xi_j = \sqrt{\frac{4\sin\omega_0}{3K^3}} \exp\left(-t\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\omega_0\right)\eta_j$ . Преобразованная система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\eta_1/2 - i(\gamma\eta_3 + |\eta_1|^2\eta_1), \\ \dot{\eta}_2 &= -\eta_2/2 - i(\gamma\eta_1 + |\eta_2|^2\eta_2), \\ \dot{\eta}_3 &= -\eta_3/2 - i(\gamma\eta_2 + |\eta_3|^2\eta_3), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\gamma = \frac{K\nu_0}{2\sin\omega_0}$ .

Сразу отметим, что при  $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$  нулевое решение (2.10) асимптотически устойчиво, а при  $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$  — неустойчиво. Если же  $|\gamma| = 1/\sqrt{3}$ , то система (2.10) имеет в фазовом пространстве прямую, заполненную неподвижными точками.



### 2.3.3 Динамические свойства нормальной формы отображения

Качественный анализ системы (2.10) удобнее производить после перехода в ней к полярным координатам  $\eta_j = p_i e^{i\varphi_j}$ . Обозначая  $\alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_1$  и  $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1/2 + \gamma p_3 \sin \alpha_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2/2 + \gamma p_1 \sin \alpha_2, \\ \dot{p}_3 &= -p_3/2 - \gamma p_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_1 &= \gamma \left[ \frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 - \frac{p_2}{p_3} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + p_1^2 - p_3^2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \gamma \left[ \frac{p_1}{p_2} \cos \alpha_2 - \frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 \right] + p_2^2 - p_1^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Остановимся сначала на простейших свойствах системы (2.11) аналитического характера. Прежде всего отметим свойство циклической симметрии, которое следует из того, что осцилляторы исходной системы разностных уравнений (2.5) идентичны друг другу. Как легко видеть, система (2.11) инвариантна относительно замен

$$p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_1, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow -\alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.12)$$

и периодична по  $\alpha_1, \alpha_2$  с периодом  $2\pi$ . Тем самым любая траектория системы (2.11) либо является самосимметричной, либо одновременно с ней в фазовом пространстве (2.11) сосуществуют еще две траектории, получающиеся из данной однократной или двукратной заменой (2.12).

Второе свойство системы (2.11) состоит в существовании в ее фазовом пространстве двух инвариантных прямых

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi/3, \\ p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = -2\pi/3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Система (2.11) сводится к уравнению  $\dot{p} = (\gamma\sqrt{3} - 1)p/2$ , на первой из прямых (2.13) и  $\dot{p} = -(\gamma\sqrt{3} + 1)p/2$  — на второй. Как уже отмечалось выше, при  $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$  нулевое решение (2.10) асимптотически устойчиво. Система (2.11) в силу выполненных замен уже не имеет нулевого решения, однако при указанных ограничениях ее траектории стремятся к нулю вдоль одного из инвариантных направлений. При  $\gamma = 1/\sqrt{3}$  первая из инвариантных прямых (2.13) заполнена состояниями равновесия, а при  $\gamma = -1/\sqrt{3}$  — вторая.

Увеличение  $|\gamma|$  приводит в обоих случаях к мягкому ответвлению периодических колебаний. Учитывая, что данные фазовые перестройки происходят в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых собственных чисел, при  $\gamma = \pm(1/\sqrt{3} + \mu)$ , где  $0 < \mu \ll 1$ , можно построить асимптотику устойчивого периодического режима системы (2.11). Данный критический случай подробно изучен, например, в книге [9]. При  $\gamma = 1/\sqrt{3} + \mu$  имеем

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^+, p^+, p^+, \alpha^+, \alpha^+)^T + r^+ \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^+ \exp(\omega^+ t)] + O(\mu). \quad (2.14)$$

Здесь  $p^+ = \sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$ ,  $\alpha^+ = 2\pi/3$ ,  $\omega^+ = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $r^+ \simeq 2.745$ , а вектор  $w^+$  имеет вид  $w^+ \simeq (-0.1997 - 0.2029i, -0.0758 + 0.2744i, 0.2756 - 0.0715i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$ . Если же  $\gamma = -1/\sqrt{3} - \mu$ , то асимптотика устойчивого цикла становится следующей:

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^-, p^-, p^-, \alpha^-, \alpha^-)^T + r^- \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^- \exp(\omega^- t)] + O(\mu), \quad (2.15)$$

где  $p^- = \sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ ,  $\alpha^- = -2\pi/3$ ,  $\omega^- = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ,  $r^- \simeq 2.33$ , а  $w^- \simeq (-0.21 + 0.2619i, 0.3318 + 0.051i, -0.1218 - 0.3129i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$ .

Численный анализ, выполненный с помощью программы Tracer 3 (см. [31]), показал, что при увеличении параметра  $\gamma > 1/\sqrt{3}$  в системе (2.8) наблюдается следующая динамика (точнее говоря, речь пойдет о фрагментах динамики, которые удалось выявить с той или иной степенью достоверности).

1. При  $\gamma_1^+ < \gamma < \gamma_2^+$  ( $\gamma_1^+ = 1/\sqrt{3} \simeq 0.57735$ ,  $\gamma_2^+ \simeq 0.716$ ) устойчив цикл  $C_1$ , ответвившийся при  $\gamma = \gamma_1^+$  от состояния равновесия на инвариантной прямой (2.13) и допускающий при  $0 < \gamma - \gamma_1^+ \ll 1$  асимптотику (2.14).

2. При  $\gamma = \gamma_2^+$  с циклом  $C_1$  происходит бифуркация удвоения и при  $\gamma_2^+ < \gamma < \gamma_3^+$  ( $\gamma_3^+ \simeq 0.7173$ ) устойчив условно двухобходный цикл  $C_2$ .

3. При  $\gamma = \gamma_3^+$  от периодического решения двойного периода бифурцируют двухчастотные колебания (двумерный тор), которые устойчивы на промежутке  $\gamma_3^+ < \gamma < \gamma_4^+$ .

4. При  $\gamma > \gamma_4^+$  в системе наблюдаются неупорядоченные колебания, старший ляпуновский показатель которых растет (см рис. 2.1).

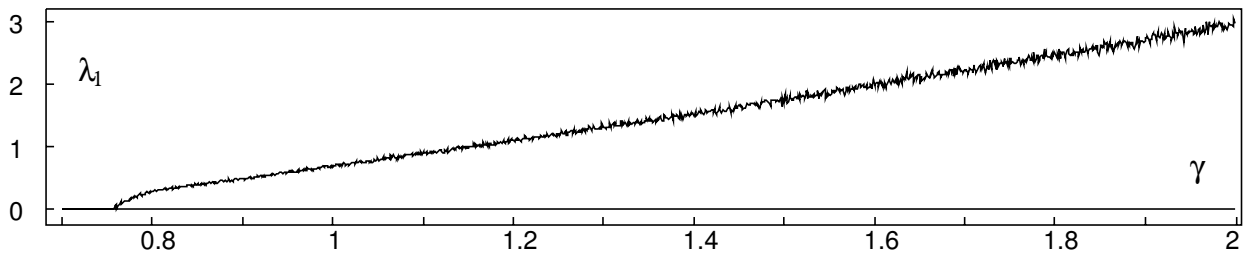


Рис. 2.1.

Величину  $\gamma_4^+$  можно оценить лишь весьма приближенно, как точку в которой старший ляпуновский показатель становится положительным, в соответствии с этим  $0.75 \lesssim \gamma_4^+ \lesssim 0.758$ . Способ перехода от двухчастотных колебаний к хаотическим, также остается в данном случае неизвестным.

Рассмотрим теперь фазовые перестройки системы (2.8) при отрицательных  $\gamma$ . В этом случае реализуется сложная схема всевозможных бифуркаций циклов и хаотических режимов. Выделим область значений  $\gamma$ , примыкающую к  $\gamma = \gamma_1^-$ , где  $\gamma_1^- = -1/\sqrt{3} \simeq 0.57735$ . При этих значениях параметра возникают и претерпевают фазовые перестройки большое число различных режимов, которые удается классифицировать по амплитуде колебаний. Выделим режимы условно малой, средней и большой амплитуды и будем обозначать буквами  $C$  и  $A$  соответственно циклы и хаотические аттракторы системы (2.11), добавляя индексы  $s$ ,  $m$  и  $l$  (малый, средний, большой) для обозначения их амплитуды. Рассмотрим сначала бифуркации, происходящие в этой ситуации с циклом малой амплитуды.

1. Цикл малой амплитуды  $C_s$  мягко ответвляется при  $\gamma = \gamma_1^-$  от состояния равновесия на второй инвариантной прямой (2.13) и имеет вблизи критического значения параметра  $\gamma$  асимптотику (2.15) (на рис. 2.2-2.5 этот цикл изображен жирной кривой).

2. При  $\gamma_2^- < \gamma < \gamma_1^-$  ( $\gamma_2^- \simeq -0.716$ ) цикл  $C_s$  устойчив, а при  $\gamma = \gamma_2^-$  он претерпевает бифуркацию удвоения периода.

3. Цикл условно двойного периода  $C_s^2$  остается устойчивым при  $\gamma_3^- < \gamma < \gamma_2^-$  ( $\gamma_3^- \simeq -1.272$ ).

4. При  $\gamma < \gamma_3^-$  цикл  $C_s^2$  теряет устойчивость и наблюдаются хаотические колебания с многочисленными окнами периодичности.

Отметим, что циклы  $C_s$  и  $C_s^2$  самосимметричны, т.е. инвариантны относительно замены (2.12).

Ниже на рис. 2.2 – 2.5 приведены проекции траекторий системы (2.11) на плоскость  $p_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  для некоторых характерных значений параметра  $\gamma$ . Для того чтобы получить устойчивые режимы изучаемой системы с относительно узкими областями притяжения, из 40000 случайно выбран-

ных точек области  $(0, 2] \times (0, 2] \times (0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  фазового пространства выпускались траектории, по местам сгущения которых можно судить о наличии в данной части фазового пространства какого-либо устойчивого режима.

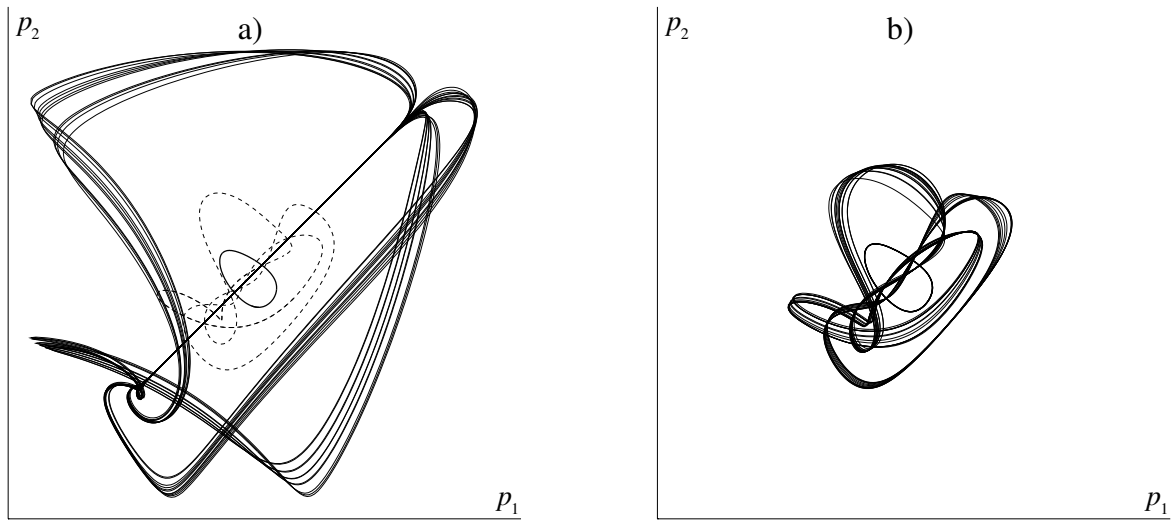


Рис. 2.2. а)  $\gamma = -0.595$ ; б)  $\gamma = -0.6022$ .

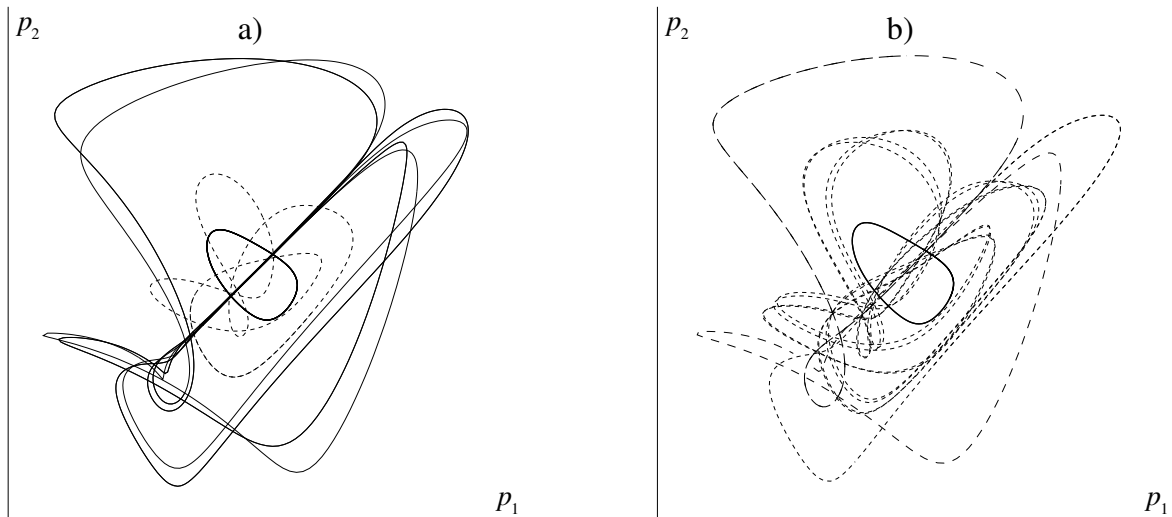
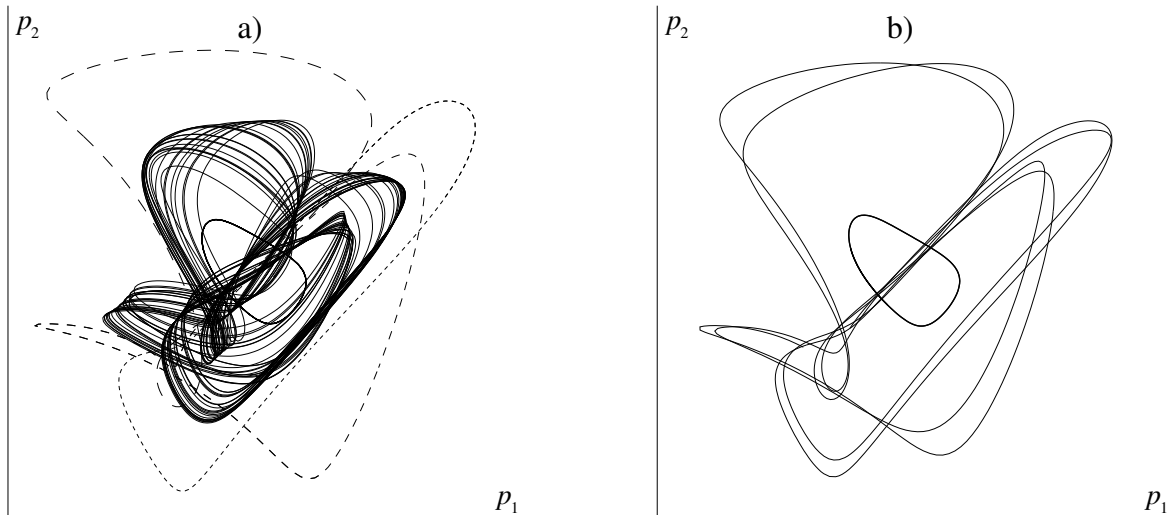
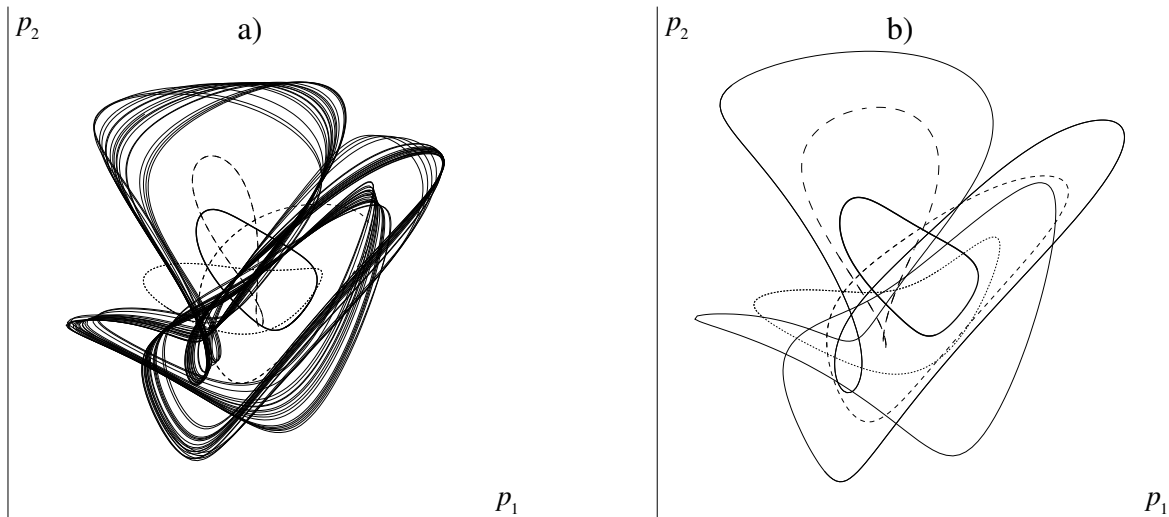


Рис. 2.3. а)  $\gamma = -0.62$ ; б)  $\gamma = -0.63$ .

Рис. 2.4. а)  $\gamma = -0.633$ ; б)  $\gamma = -0.6395$ .Рис. 2.5. а)  $\gamma = -0.65$ ; б)  $\gamma = -0.67$ .

Перейдем теперь к описанию фазовых перестроек, происходящих с циклами средней амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от  $\gamma = \gamma_m^-$  до  $\gamma = \gamma_1^-$ , где  $\gamma_m^- \simeq -0.765$ . При этом на начальном промежутке  $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_{m1}^-$ , где  $\gamma_{m1}^- \simeq -0.6483$  каскада бифуркаций нет. При  $\gamma = \gamma_m^-$  у системы (2.11) появляются три симметричных устойчивых цикла  $C_m^0$ ,  $C_m^{0*}$ ,  $C_m^{0**}$ , переходящих друг в друга в результате замены (2.12), а при  $\gamma = \gamma_{m1}^-$  они теряют устойчивость. На рис. 2.5а, 2.5б эти циклы изображены пунктиром различной длины.

Будем следить за каскадами бифуркаций, происходящими с режимами средней амплитуды, увеличивая параметр  $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_1^-$ . Важно отметить, что области, в которых происходят каскады бифуркаций, мы будем рассматривать при увеличении  $\gamma$ , а за бифуркациями внутри этих областей — при

уменьшении этого параметра. Ниже приведены четыре промежутка, на которых происходят стандартные каскады бифуркаций удвоения и возникновения хаотических колебаний.

1. Первый каскад происходит на промежутке  $\gamma_{m2}^- < \gamma < \gamma_{m3}^-$ , где  $\gamma_{m2}^- \simeq -0.6335$ ,  $\gamma_{m3}^- \simeq -0.61913$  при уменьшении  $\gamma$ :

— при  $\gamma = \gamma_{m3}^-$  возникает самосимметричный цикл  $C_m^1$  (на рис. 2.3а этот цикл изображен пунктиром);

— при  $\gamma \simeq -0.6268$  происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл  $C_m^{12}$  удвоенного периода;

— при  $\gamma \simeq -0.6296$  происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл  $C_m^{13}$  условно периода четыре (на рис. 2.3b пунктиром изображен цикл  $C_m^{13}$  при  $\gamma = -0.63$ );

— при  $\gamma_{m2}^- < \gamma \lesssim -0.631$  система (2.11) имеет хаотические колебания средней амплитуды. (На рис. 2.4а изображен хаотический аттрактор  $A_m^1$  при  $\gamma = -0.633$ ).

2. Второй каскад происходит на промежутке  $\gamma_{m4}^- < \gamma < \gamma_{m5}^-$ , где  $\gamma_{m4}^- \simeq -0.61172$ ,  $\gamma_{m5}^- \simeq -0.60605$  также при уменьшении  $\gamma$ . Отметим значения параметра  $\gamma$ , при которых происходят бифуркации в этом случае:

— при  $\gamma = \gamma_{m5}^-$  возникает самосимметричный цикл  $C_m^2$ ;

— при  $\gamma \simeq -0.61$  происходит первая бифуркация удвоения периода, а при  $\gamma \simeq -0.611$  — вторая.

— при  $\gamma_{m4}^- < \gamma \lesssim -0.6112$  система (2.11) имеет хаотические колебания средней амплитуды.

3. Третий каскад происходит на промежутке  $\gamma_{m6}^- < \gamma < \gamma_{m7}^-$ , где  $\gamma_{m6}^- \simeq -0.60226$ ,  $\gamma_{m7}^- \simeq -0.59902$ . Отметим бифуркационные значения  $\gamma$

— при  $\gamma = \gamma_{m7}^-$  возникает 3 симметричных цикла  $C_m^3$ ,  $C_m^{3*}$ ,  $C_m^{3**}$ ;

— при  $\gamma \simeq -0.60143$  с каждым из них происходит первая бифуркация удвоения периода, а при  $\gamma \simeq -0.60196$  — вторая.

— при  $\gamma_{m6}^- < \gamma \lesssim -0.602$  система (2.11) имеет три симметричных хаоса средней амплитуды. (На рис. 2.2b изображены симметричные хаотические аттракторы  $A_m^3$ ,  $A_m^{3*}$  и  $A_m^{3**}$  при  $\gamma = -0.6022$ ).

4. Последний замеченный каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов средних размеров происходит на промежутке  $\gamma_{m8}^- < \gamma < \gamma_{m9}^-$ , где  $\gamma_{m8}^- \simeq -0.59677$ ,  $\gamma_{m9}^- \simeq -0.59475$ . В этом случае самосимметричный цикл  $C_m^4$  возникает при  $\gamma = \gamma_{m9}^-$ , при  $\gamma \simeq -0.59627$  происходит первая бифуркация удвоения, а при  $\gamma \simeq -0.5966$  — вторая.

В каждом из четырех описанных случаев вычислялись ляпуновские показатели соответствующего хаотического аттрактора. В таблице 2.1 приведены величины ляпуновских показателей и ляпуновской размерности для

последних значений  $\gamma$  в каждом каскаде, при которых наблюдаются хаотические колебания ( $\gamma = \gamma_{m2}^-, \gamma_{m4}^-, \gamma_{m6}^-, \gamma_{m8}^-$ ).

Таблица 2.1.

$\gamma$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$d_L$
-0.6335	0.0224	$8 \cdot 10^{-5}$	-0.1635	-1.420	-1.439	2.137
-0.61172	0.0145	0.0005	-0.072	-1.460	-1.483	2.209
-0.60226	0.0108	$6 \cdot 10^{-6}$	-0.045	-1.483	-1.483	2.241
-0.59677	0.009	$-5 \cdot 10^{-5}$	-0.0335	-1.4818	-1.4935	2.267

Опишем теперь каскады бифуркаций, полученные для режимов большой амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от  $\gamma = \gamma_l^-$  до  $\gamma = \gamma_1^-$ , где  $\gamma_l^- \simeq -0.67812$ . Как и ранее, будем следить за фазовыми перестройками при увеличении параметра  $\gamma$ . Отметим однако, что в отличие от предыдущего случая перестройки внутри каскадов происходят при увеличении  $\gamma$ .

1. Первый каскад бифуркаций режимов большой амплитуды наблюдается на промежутке  $\gamma_{l1}^- < \gamma < \gamma_{l2}^-$ , где  $\gamma_{l1}^- \simeq -0.67812$ ,  $\gamma_{l2}^- \simeq -0.64795$  при увеличении  $\gamma$ :

— при  $\gamma = \gamma_{l1}^-$  возникает самосимметричный цикл  $C_l^1$  (на рис. 2.5b этот цикл изображен тонкой сплошной линией при  $\gamma = -0.67$ );

— при  $\gamma \simeq -0.6575$  происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл  $C_l^{12}$  удвоенного периода;

— при  $\gamma \simeq -0.6531$  происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл  $C_l^{13}$  условно периода четыре;

— при  $-0.652 \lesssim \gamma < \gamma_{l2}^-$  система (2.11) имеет хаотические колебания большой амплитуды (на рис. 2.5a изображен хаотический аттрактор  $A_l^1$  при  $\gamma = -0.65$ ).

2. Второй каскад происходит на промежутке  $\gamma_{l3}^- < \gamma < \gamma_{l4}^-$ , где  $\gamma_{l3}^- \simeq -0.64875$ ,  $\gamma_{l4}^- \simeq -0.6367$ . Отметим бифуркационные значения  $\gamma$ :

— при  $\gamma = \gamma_{l3}^-$  возникает самосимметричный цикл  $C_l^2$ ;

— при  $\gamma \simeq -0.64016$  происходит первая бифуркация удвоения периода, а при  $\gamma \simeq -0.6382$  — вторая (на рис. 2.4b изображен цикл большой амплитуды  $C_l^{21}$  после первой бифуркации удвоения при  $\gamma = -0.6395$ );

— при  $-0.6379 \lesssim \gamma < \gamma_{l4}^-$  система (2.11) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

3. Третий каскад происходит при  $\gamma_{l5}^- < \gamma < \gamma_{l6}^-$ , где  $\gamma_{l5}^- \simeq -0.63306$ ,  $\gamma_{l6}^- \simeq -0.62664$ , с тремя сосуществующими режимами большой амплиту-

ды, которые переходят друг в друга в результате замены (2.12). Отметим бифуркационные значения  $\gamma$ :

— при  $\gamma = \gamma_{l5}^-$  возникает три симметричных друг другу цикла  $C_l^3$ ,  $C_l^{3*}$ ,  $C_l^{3**}$  (на рис. 2.3b и 2.4a эти циклы изображены тонким пунктиром различной длины);

— при  $\gamma \simeq -0.62866$  происходит первая бифуркация удвоения периода, а при  $\gamma \simeq -0.62752$  — вторая;

— при  $-0.6272 \lesssim \gamma < \gamma_{l6}^-$  система (2.11) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

4. Четвертый каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов большой амплитуды происходит на промежутке  $\gamma_{l7}^- < \gamma < \gamma_{l8}^-$ , где  $\gamma_{l7}^- \simeq -0.62315$ ,  $\gamma_{l8}^- \simeq -0.6193$ . В этом случае самосимметричный цикл  $C_l^4$  возникает при  $\gamma = \gamma_{l7}^-$ , при  $\gamma \simeq -0.62066$  происходит первая бифуркация удвоения, а при  $\gamma \simeq -0.6199$  — вторая (на рис. 2.3a изображен цикл большой амплитуды  $C_l^{41}$  после первой бифуркации удвоения при  $\gamma = -0.62$ ). Хаотические колебания наблюдаются на промежутке  $-0.6197 \lesssim \gamma < \gamma_{l8}^-$ .

При дальнейшем увеличении параметра  $\gamma$  встречаются и другие каскады бифуркаций, разворачивающиеся на все более узких промежутках, с точкой сгущения, по-видимому, в  $\gamma = \gamma_1^-$ . Например, на рис. 2.2a представлен хаотический режим большой амплитуды, возникший в результате аналогичного описанным выше каскада бифуркаций.

Для хаотических режимов внутри полученных промежутков также вычислялись ляпуновские показатели и ляпуновская размерность соответствующего хаотического аттрактора большой амплитуды. В таблице 2.2 приведены эти величины для  $\gamma = \gamma_{l2}^-, \gamma_{l4}^-, \gamma_{l6}^-, \gamma_{l8}^-$  и для  $\gamma = -0.595$  (см. колебания большой амплитуды на рис. 2.2a).

Таблица 2.2.

$\gamma$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$d_L$
-0.64795	0.0268	-0.0001	-0.1686	-1.381	-1.478	2.158
-0.6367	0.0186	0.0001	-0.1176	-1.3993	-1.5016	2.158
-0.62664	0.0153	$-2 \cdot 10^{-5}$	-0.094	-1.436	-1.485	2.163
-0.6193	0.0129	$9 \cdot 10^{-5}$	-0.077	-1.45	-1.486	2.168
-0.595	0.0059	-0.0005	-0.031	-1.473	-1.502	2.158

Отметим, что области устойчивости хаотического режима первого каскада  $A_l^1$  и цикла  $C_l^2$  второго каскада пересекаются, что позволяет предпо-



ложить, что режимы большой амплитуды могут быть классифицированы более тонко. В целом система (2.11) демонстрирует при данных значениях параметров большое число сосуществующих устойчивых режимов. На рисунках 2.2-2.5 можно наблюдать до пяти сосуществующих устойчивых циклов и хаотических режимов.

Фазовые перестройки, происходящие с аттракторами системы (2.11) при  $\gamma < \gamma_3^-$ , идентифицировать достаточно сложно, впрочем характер хаотических колебаний, которые возникают в этом случае у системы (2.11), может быть оценен по старшему ляпуновскому показателю, графики которого приведены на рис. 2.2-2.5. Нетрудно видеть, что области хаотических колебаний перемежаются в этом случае многочисленными окнами периодичности или квазипериодичности (старший показатель нулевой). На рис. 2.6 дана общая картина зависимости  $\lambda_1(\gamma)$  на промежутке изменения  $\gamma$  от  $-10$  до  $-1$ . На рис. 2.7-2.9 более подробно рассмотрены сложные участки графика  $\lambda_1(\gamma)$ .

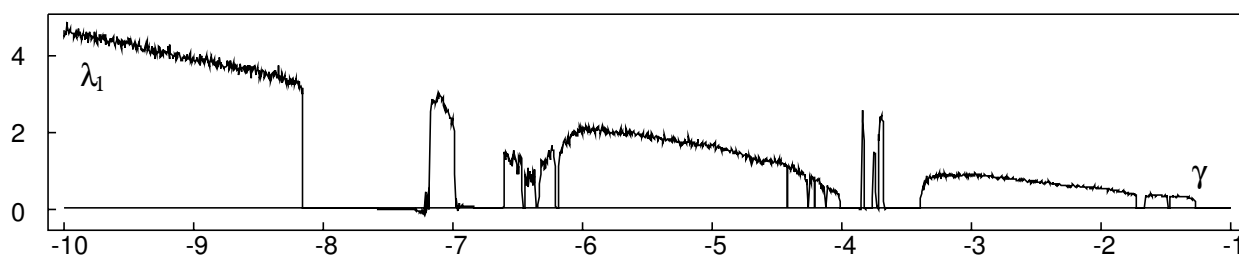


Рис. 2.6

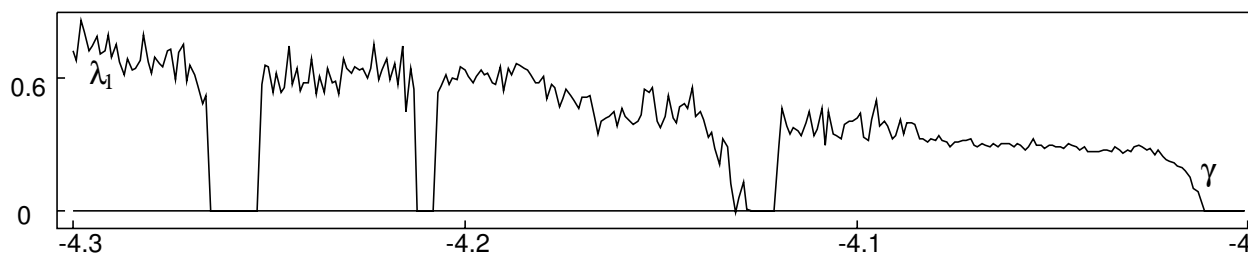


Рис. 2.7

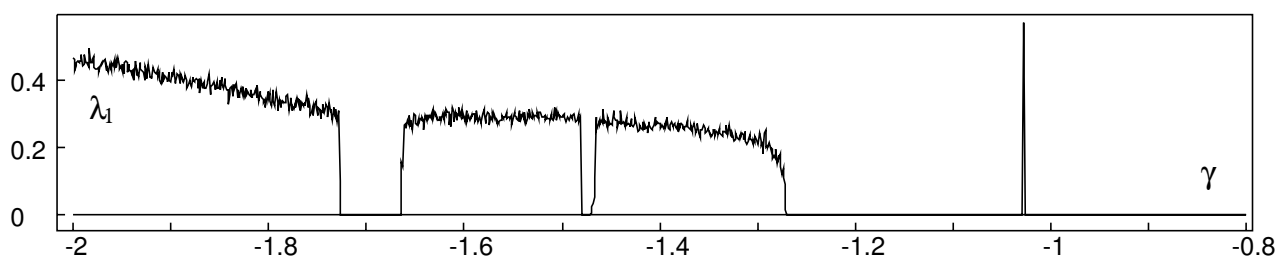


Рис. 2.8

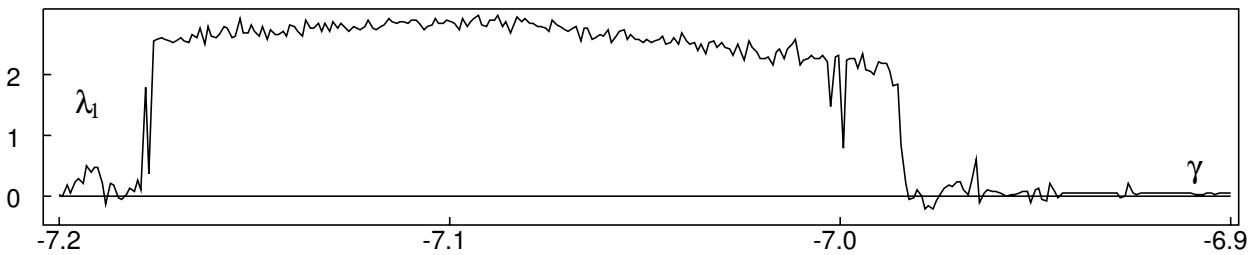


Рис. 2.9

Таким образом, изучение динамических свойств решений системы (2.11) показало, что у нее может сосуществовать большое число устойчивых циклов или торов, которым соответствуют устойчивые торы исходной разностной системы (2.5) с асимптотикой (2.2). Следует однако заметить, что вдоль одного из инвариантных направлений (2.13) решения системы (2.11) стремятся при  $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$  к бесконечности. И, хотя при изучаемых значениях параметров инвариантные лучи (2.13) являются отталкивающими, наличие направления, по которому решение может уходить из области применимости асимптотических методов, требует вычисления следующего по порядку малости коэффициента в разложении (2.4) и дополнительного анализа соответствующей нормальной формы. При достаточно больших  $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$  слагаемым, определяющим поведение решений системы (2.8) с добавкой (2.9), является вещественная часть слагаемого при  $|\xi_j|^4 \xi_j$ . Эта величина согласно представлению (2.9) равна  $\frac{9a^2 K^6}{8 \sin^2 \omega_0}$  и положительна, исходя из этого, масштаб применимости полученных в работе результатов имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Для начальных условий внутри шара радиуса порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  траектории системы (2.5) будут притягиваться к одному из режимов, определяемых нормальной формой (2.11), а вне некоторого шара радиуса порядка  $\sqrt[4]{\varepsilon}$  траектории будут удаляться от нуля и, учитывая диссипативность исходной системы, попадут в область притяжения какого-либо нелокального режима. Это, в частности, означает, что у динамической системы (2.5) может сосуществовать большое число сложных колебательных режимов различных масштабов.

## Глава 3

# Нормализация дифференциально- разностных уравнений

### 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = l(x(t+s), \varepsilon), \quad (3.1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon$  — скалярный малый параметр. Нелинейный оператор  $l(x(s), \varepsilon)$  при каждом  $\varepsilon$  действует из  $C(-h, 0)$  в  $\mathbb{R}^n$ . Ниже предполагается, что  $l(0, \varepsilon) = 0$  и что  $l(x(s), \varepsilon)$  достаточно гладко зависит от  $x(s)$ , принадлежащих малой окрестности нуля  $C(-h, 0)$  и от  $\varepsilon$ . Напомним, что начальным условием задачи (3.1) служит непрерывная функция  $x(s)$  при  $-h \leq s \leq 0$ .

Нелинейный оператор  $l(x(s), \varepsilon)$ , действующий из  $C(-h, 0)$  в  $\mathbb{R}^n$ , имеет вид

$$l(x(s), \varepsilon) = l_1(x(s), \varepsilon) + l_2(x(s), \varepsilon) + l_3(x(s), \varepsilon) + \dots \quad (3.2)$$

В правой части (3.2) выделены соответственно линейная, квадратичная и кубическая составляющие. Точками обозначены слагаемые, имеющие по  $x(s)$  более высокий порядок малости.

Будем считать, что характеристический квазимногочлен линейного уравнения

$$\dot{x} = l_1(x(t+s), 0) \quad (3.3)$$

имеет (как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений в первой главе)  $m$  пар чисто мнимых корней  $\pm i\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , а у всех остальных корней действительные части отрицательны и отделены от нуля. При совпадении некоторых из лежащих на мнимой оси корней считаем, что им соответствует столько линейно независимых решений, какова их кратность.

Так же как и в предыдущих главах, наша задача состоит в изучении окрестности нулевого решения задачи (3.1) и в построении на его устойчивом интегральном многообразии уравнения нормальной формы. Как оказывается, алгоритм нормализации имеет в данном случае ряд особенностей.

## 3.2 Алгоритмы построения нормальной формы дифференциальных уравнений с запаздыванием

### 3.2.1 Описание основного алгоритма

Приведем сначала рассуждение, принадлежащее Н.Н. Боголюбову и Ю.А. Митропольскому, и носящее название принципа сведения. В применении к уравнениям с запаздыванием он сформулирован, например, в книге [27].

В соответствии с этим принципом, разобьем фазовое пространство изучаемой системы на два корневых подпространства  $C_1(\varepsilon)$  и  $C_2(\varepsilon)$  так, что  $C_1(\varepsilon) \oplus C_2(\varepsilon) = C(-h, 0)$ . Первое из этих подпространств соответствует  $2m$  корням характеристического квазимногочлена, выходящим при  $\varepsilon = 0$  на мнимую ось, а второе дополняет первое до  $C(-h, 0)$ .

Сделаем одно дополнительное предположение относительно гладкости нелинейной части оператора  $l(x(s), \varepsilon)$ . Считаем, что существует определенный на всем  $C(-h, 0)$  оператор

$$l(x(s), \varepsilon, \delta) = l_1(x(s), \varepsilon) + l_2(x(s), \varepsilon, \delta), \quad (3.4)$$

зависящий от дополнительного малого параметра  $\delta$ , достаточно гладкий по всем своим аргументам. Предполагаем, что  $l(x(s), \varepsilon, \delta) = l_1(x(s), \varepsilon)$  при  $\|x(s)\|_{C(-h, 0)} \leq \delta$ . Относительно нелинейного слагаемого  $l_2(x(s), \varepsilon, \delta)$  будем считать, что для произвольных  $x(s), y(s) \in C(-h, 0)$  выполнено неравенство

$$\|l_2(x(s), \varepsilon, \delta) - l_2(y(s), \varepsilon, \delta)\|_{\mathbb{R}^n} \leq q(\delta) \|x(s) - y(s)\|_{C(-h, 0)} \quad (3.5)$$

где  $q(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

В случае выполнения приведенного условия можно утверждать, что система (3.1) имеет  $2m$ -мерное экспоненциально устойчивое интегральное многообразие. Обозначим через  $P_1(\varepsilon)$ ,  $P_2(\varepsilon)$  проекторы, соответствующие подпространствам  $C_1(\varepsilon)$  и  $C_2(\varepsilon)$ , тогда названное интегральное многообразие задается равенствами

$$v_2 = g(v_1, \varepsilon), \quad v_j = P_j(\varepsilon)x(s), \quad j = 1, 2. \quad (3.6)$$

Здесь  $g : C_1(\varepsilon) \rightarrow C_2(\varepsilon)$  — достаточно гладкий по своим аргументам оператор. Корневое подпространство  $C_1(\varepsilon)$  натянуто на собственные функции оператора  $l_1(x(s), 0)$ , соответствующие собственным числам  $\pm i\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , и имеет размерность  $2m$ . Считая  $v_1$   $2m$ -мерным вектором отщепим от (3.1)  $2m$ -мерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{v}_1 = A(\varepsilon)v_1 + V(v_1, v_2, \varepsilon). \quad (3.7)$$

Если теперь подставить выражение (3.6) в (3.7) получаем систему

$$\dot{v}_1 = A(\varepsilon)v_1 + F_2(v_1, \varepsilon), \quad (3.8)$$

которая представляет собой сужение уравнения (3.1) на интегральное многообразие (3.6).

Таким образом, при условии выработки эффективного алгоритма определения интегрального многообразия (3.6) и уравнений (3.8) на нем, можно свести локальный анализ исходной задачи (3.1) с запаздыванием к изучению конечномерной нормальной формы (3.8).

Рассмотрим метод построения нормальной формы, изложенный в первой главе, в применении к дифференциальным уравнениям с запаздыванием (3.1).

Предположим, что для частот  $\omega_j$  выполняются условия нерезонансности

$$\omega_j \neq n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_m\omega_m, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.9)$$

где  $(n_1, \dots, n_m)$  — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяющий неравенствам

$$2 \leq |n_1| + |n_2| + \dots + |n_m| \leq 3. \quad (3.10)$$

Выполним в (3.1) замену

$$x = \sqrt{\varepsilon}u_0(t, \tau) + \varepsilon u_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}u_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (3.11)$$

где

$$u_0 = \sum_{j=1}^m [z_j(\tau) \exp(i\omega_j t) a_j + \bar{z}_j(\tau) \exp(-i\omega_j t) \bar{a}_j]. \quad (3.12)$$

Здесь  $a_j \exp(i\omega_j s)$ ,  $j = 1, \dots, m$  — собственные функции линейного оператора  $l_1(x(s), 0)$ , отвечающие его собственным значениям  $i\omega_j$ ,  $z_j(\tau)$  — комплекснозначные скалярные функции медленного аргумента. В полученном соотношении

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m [(\sqrt{\varepsilon} i\omega_j z_j(\tau) + \varepsilon^{3/2} z_j'(\tau)) e^{i\omega_j t} a_j + \text{к.с.}] + \varepsilon(\dot{u}_1 + \varepsilon u_1') + \\ & + \varepsilon^{3/2}(\dot{u}_2 + \varepsilon u_2') \dots = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^m [l_1(z_j(\tau + \varepsilon s) e^{i\omega_j(t+s)} a_j, \varepsilon) + \text{к.с.}] + \\ & + \varepsilon l_1(u_1(t+s), \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} l_1(u_2(t+s), \varepsilon) + \\ & + \varepsilon l_2(\sqrt{\varepsilon} u_0(t+s, \tau + \varepsilon s) + \varepsilon u_1(t+s, \tau + \varepsilon s) \dots, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon^{3/2} l_3(\sqrt{\varepsilon} u_0(t+s, \tau + \varepsilon s) + \dots, \varepsilon) + \dots, \quad (3.13) \end{aligned}$$

где точкой обозначена производная по  $t$ , а штрихом — по  $\tau$ , приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$ . Отметим важное для разложений выражений (3.13) в ряды соотношение  $z_j(\tau + \varepsilon s) = z_j(\tau) + \varepsilon s z_j'(\tau) + \dots$

В силу выбора функции  $u_0$  первое приближение разложения даст верное тождество. На каждом следующем шаге применения алгоритма имеем линейную задачу

$$\dot{u}_1 = l_1(u_1(t+s), 0) + g_1(t, z_1, \dots, z_m), \quad (3.14)$$

$$\dot{u}_2 = l_1(u_2(t+s), 0) + g_2(t, z_1, \dots, z_m, z_1', \dots, z_m') \quad (3.15)$$

Из условий разрешимости задачи (3.15) и получается нормальная форма уравнения (3.1).

Проиллюстрируем применение алгоритма на примере уравнения Хатчинсона [25]

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \frac{N(t-h)}{k} \right] N, \quad (3.16)$$

которое является базовым для ряда задач популяционной динамики. Здесь функция  $N(t)$  — численность популяции, а положительные параметры  $r$ ,  $h$  и  $k$  — ее характеристики.

Уравнение (3.16) имеет два состояния равновесия  $N = 0$  и  $N = k$ , первое из которых при  $r > 0$  неустойчиво, а второе — устойчиво при  $0 < rh < \pi/2$

и неустойчиво при  $rh > \pi/2$ . При  $rh = \pi/2$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой от состояния равновесия  $N = k$  ответвляется орбитально асимптотически устойчивый цикл. Построим нормальную форму задачи (3.16) и найдем асимптотику цикла.

Выполним в (3.16) упрощающие замены  $N = k(1 + n)$  и  $t \rightarrow th$  и обозначим  $rh$  снова  $r$ . В полученной задаче

$$\dot{n} = -rn(t - 1)(1 + n) \quad (3.17)$$

будем считать, что  $r = \pi/2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Линеаризованная в нуле задача (3.17)

$$\dot{n} = -rn(t - 1) \quad (3.18)$$

имеет характеристический квазимногочлен вида

$$P(\lambda) \equiv \lambda + re^{-\lambda}, \quad (3.19)$$

который при  $r = \pi/2$  имеет пару корней  $\pm i\pi/2$  на мнимой оси, а остальные лежат в левой комплексной полуплоскости.

**Задача 11.** Докажите, что корни квазимногочлена  $\lambda + \frac{\pi}{2}e^{-\lambda}$  лежат в левой комплексной полуплоскости за исключением одной пары  $\pm i\frac{\pi}{2}$ .

Применим к уравнению (3.17) изложенный метод построения нормальной формы.

Выполняя в (3.17) нормирующую замену

$$n(t, \tau) = \sqrt{\varepsilon}(z(\tau) \exp(i\pi t/2) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\pi t/2)) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_2(t, \tau) + \dots, \quad (3.20)$$

получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} i \frac{\pi}{2} (z(\tau) e^{i\pi t/2} + \bar{z}(\tau) e^{-i\pi t/2}) + \varepsilon(\dot{x}_1 + \varepsilon x_1') + \\ & \quad + \varepsilon^{3/2} (z' e^{i\pi t/2} + \bar{z}' e^{-i\pi t/2}) + \varepsilon^{3/2} (\dot{x}_2 + \varepsilon x_2') = \\ & = -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \left[ \sqrt{\varepsilon} (z(\tau - \varepsilon) e^{i\pi(t-1)/2} + \bar{z}(\tau - \varepsilon) e^{-i\pi(t-1)/2}) + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon x_1(t - 1, \tau - \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} x_2(t - 1, \tau - \varepsilon) \right] \times \\ & \quad \times \left( 1 + \sqrt{\varepsilon} (z(\tau) e^{i\pi t/2} + \bar{z}(\tau) e^{-i\pi t/2}) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_2(t, \tau) \right). \quad (3.21) \end{aligned}$$

Приравнивая в (3.21) коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , найдем нормальную форму уравнения (3.17). Отметим, что

$$z(\tau - \varepsilon) = z(\tau - \varepsilon) - \varepsilon z(\tau) + \dots$$

При  $\varepsilon$  имеем уравнение

$$\dot{x}_1 = -\frac{\pi}{2}x_1(t-1) + i\frac{\pi}{2}(z^2 e^{i\pi t} - \bar{z}^2 e^{-i\pi t}), \quad (3.22)$$

решение которого имеет вид

$$x_1(t) = \frac{2-i}{5}z^2 e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5}\bar{z}^2 e^{-i\pi t}. \quad (3.23)$$

При  $\varepsilon^{3/2}$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} z' e^{i\pi t/2} + \bar{z}' e^{-i\pi t/2} + \dot{x}_2 = & -\frac{\pi}{2}x_2(t-1) - \frac{\pi}{2} \left[ (z e^{i\pi(t-1)/2} + \bar{z} e^{-i\pi(t-1)/2})x_1 + \right. \\ & \left. + (z e^{i\pi t/2} + \bar{z} e^{-i\pi t/2})x_1(t-1) - (z' e^{i\pi t/2} + \bar{z}' e^{-i\pi t/2}) \right] - \\ & - (z e^{i\pi t/2} + \bar{z} e^{-i\pi t/2}), \quad (3.24) \end{aligned}$$

из условий разрешимости которого и выходит нормальная форма

$$\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z' = iz + \frac{(1-3i)\pi}{10}|z|^2 z. \quad (3.25)$$

Переходя к полярным координатам  $z = \rho e^{i\varphi}$ , для амплитудной и фазовой переменных получаем

$$\rho' = \frac{2\pi}{4 + \pi^2}\rho - \frac{3\pi - 2}{20}\rho^3, \quad (3.26)$$

$$\varphi' = \frac{4}{4 + \pi^2} - \frac{\pi + 6}{20}\rho^2. \quad (3.27)$$

Асимптотически устойчивое состояние равновесия уравнения (3.26)

$$\rho^* = \sqrt{\frac{40\pi}{(3\pi - 2)(\pi^2 + 4)}} \quad (3.28)$$

позволяет, после подстановки в формулу (3.20) получить асимптотику орбитально асимптотически устойчивого цикла уравнения (3.17).

Рассмотрим два более сложных примера применения, изложенных выше алгоритмов.



### 3.3 Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона

#### 3.3.1 Постановка задачи

Уравнение Хатчинсона [25] является, как известно, простейшим способом учета возрастной структуры в задаче о динамике популяции особей, борющихся за общую пищу. В уравнении (3.16) функция  $N(t)$  — численность популяции, а положительные параметры  $r$ ,  $h$  и  $k$  — соответственно мальтузианский коэффициент линейного роста, возраст половозрелости и средняя численность популяции, обусловленная емкостью среды. С помощью модели (3.16) были предприняты удачные попытки объяснения различных случаев циклического изменения численности популяции (см., например, [26] и многие другие).

В уравнении (3.16) учитывается лишь возраст половозрелости  $h$ , понятно, однако, что вклад в изменение численности для возрастных групп, перешедших этот возраст, различен. Модель динамики популяции, учитывающая ее возрастную структуру, имеет вид

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^m a_j N(t - h_j) \right] N, \quad (3.29)$$

где весовые коэффициенты  $a_j \geq 0$  определяют вклад возрастной группы, соответствующей запаздыванию  $h_j > 0$ . Отметим, что  $\sum_{j=1}^m a_j = 1$ .

Изучение уравнения (3.29) с большим числом запаздываний представляет с аналитической точки зрения достаточно сложную задачу, поэтому представляется важным изучить ее сначала для  $n = 2$ . Рассмотрим уравнение

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \frac{aN(t - h_1) + bN(t - h_2)}{k} \right] N. \quad (3.30)$$

Здесь  $a, b > 0$  — весовые коэффициенты, определяющие вклад каждой из возрастных групп в воспроизводство популяции. Считаем, что

$$a + b = 1, \quad (3.31)$$

кроме того, для определенности полагаем  $h_1 > h_2$ .

Представляет интерес сравнение динамических свойств уравнений (3.16) и (3.30).

### 3.3.2 Локальный анализ

Нормируя  $N$  на  $k$  и делая замену времени  $th_1 \rightarrow t$ , переходим к соотношению

$$\dot{N} = r[1 - aN(t-1) - bN(t-h)]N, \quad (3.32)$$

где  $rh_1$  снова обозначено  $r$ ,  $h = h_2/h_1 < 1$ .

Состояниями равновесия уравнения (3.32) являются так же, как и у уравнения Хатчинсона,  $N = 0$  и  $N = \frac{1}{a+b}$ .

Легко видеть, что первое состояние равновесия неустойчиво. А для исследования устойчивости второго следует изучить расположение корней характеристического квазимногочлена уравнения (3.32), линеаризованного на  $N = \frac{1}{a+b}$

$$\dot{N} = -\frac{r}{a+b}[aN(t-1) + bN(t-h)]. \quad (3.33)$$

Выражение

$$P(\lambda) \equiv \lambda + r[ae^{-\lambda} + be^{-\lambda h}] \quad (3.34)$$

дает искомый квазимногочлен.

Полагая  $\lambda = i\omega$  и приравняв к нулю вещественные и мнимые части, получаем систему

$$\varphi(\omega) \equiv b \cos \omega h + a \cos \omega = 0, \quad (3.35)$$

$$r(\omega) \equiv \frac{\omega}{b \sin \omega h + a \sin \omega}. \quad (3.36)$$

Найдем значения параметров  $a$ ,  $r$ ,  $h$ , при которых корни квазимногочлена (3.34) переходят мнимую ось.

Следует отметить, что уравнение (3.30) описывает не только динамику численности популяции. Оно встречается в других задачах, требующих учета запаздывающего аргумента, при этом соотношение (3.31) может не выполняться. Нетрудно, однако, видеть, что заменами переменных эти два случая сводятся друг к другу.

#### Исследование характеристического квазимногочлена

Пусть в системе (3.35)-(3.36)

$$\varphi(\omega_0) = 0, \quad r = r(\omega_0) + \varepsilon, \quad \lambda = \tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon),$$

где  $\tau(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$ . Положим

$$\text{sign } \tau'_0 = -\text{sign } \varphi'(\omega_0) \left( \tau'_0 = \frac{d}{d\varepsilon} \tau(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \right). \quad (3.37)$$

Далее, пусть  $\omega_j, j = 1, 2, \dots$  — положительные корни уравнения (3.35), занумерованные в порядке возрастания с учетом их кратности. Из (3.37) следует, что числа  $\pm i\omega_j$  в случае нечетных  $j$  при увеличении  $r$  приходят из левой полуплоскости, а в случае четных — из правой. Кроме того, при любых фиксированных  $a, h$  и при достаточно малом  $r$  все корни характеристического квазимногочлена (3.34) лежат слева от мнимой оси.

Следующее утверждение позволяет узнать, сколько пар корней может одновременно находиться на мнимой оси.

**Лемма 5.** Пусть параметр  $h > 0$  достаточно мал, тогда существует счетное число таких значений  $a_k(h), r_k(h), k = 1, 2, \dots$ , что при  $a = a_k(h)$  и  $r < r_k(h)$  корни характеристического квазимногочлена (3.34) лежат в левой комплексной полуплоскости, а при  $r = r_k(h)$  две пары корней  $\pm i\omega_1(h)$  и  $\pm i\omega_2(h)$  выходят на мнимую ось.

Кроме того, имеют место асимптотические формулы

$$a_k(h) = b \left[ 1 - \frac{\pi^4}{3} (2k+1)^2 (2k+3)^2 h^4 + O(h^5) \right], \quad (3.38)$$

$$r_k(h) = \frac{1}{2bh} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{3} (4k^2 + 8k + 5) h^2 + O(h^3) \right], \quad (3.39)$$

$$\omega_{k1}(h) = \pi(2k+1) \left[ 1 - h + h^2 + \frac{\pi^2(2k+3)^2 - 3}{3} h^3 + O(h^4) \right], \quad (3.40)$$

$$\omega_{k2}(h) = \pi(2k+3) \left[ 1 - h + h^2 + \frac{\pi^2(2k+1)^2 - 3}{3} h^3 + O(h^4) \right], \quad (3.41)$$

где  $k = 1, 2, \dots$

*Доказательство.* Для того, чтобы две пары корней  $\pm i\omega_1$  и  $\pm i\omega_2$  квазимногочлена (3.34) оказались на мнимой оси, в соответствии с формулами (3.35) (3.36) имеем

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 h + t \cos \omega_1 &= 0, \\ \cos \omega_2 h + t \cos \omega_2 &= 0, \\ br(\omega_1) &= \frac{\omega_1}{t \sin \omega_1 + \sin \omega_1 h} = br(\omega_2) = \frac{\omega_2}{t \sin \omega_2 + \sin \omega_2 h}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где  $t = a/b$ .

Подставляя в (3.42) асимптотические разложения по  $h$  для  $t, \omega_1$  и  $\omega_2$  и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ , получаем (3.38),

(3.40), (3.41). Кроме того, из третьего равенства (3.42) можно получить разложение (3.39) для  $r(h)$ . Отметим, что  $\omega_1(h)$  и  $\omega_2(h)$  — два соседних нечетных решения уравнения (3.35) (каждому номеру  $k$  соответствуют два решения (3.35)). Такой выбор корней (3.35) обусловлен тем, что значение  $r_k(h)$  для них минимально. Таким образом, найденные корни квазимногочлена (3.34)  $\pm i\omega_1(h)$  и  $\pm i\omega_2(h)$  первыми пересекают мнимую ось, что и доказывает лемму.

Следует отметить, что при  $b = 1 - a$  формулы (3.38), (3.39) приобретают следующий вид:

$$a_k(h) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12}(2k+1)^2(2k+3)^2h^4 + O(h^5), \quad (3.43)$$

$$r_k(h) = \frac{1}{h} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{3}(4k^2 + 8k + 5)h^2 + O(h^3) \right]. \quad (3.44)$$

Рассмотрим теперь условия, при которых вырожденные кривые  $a = a_k(h)$  могут прерваться. Выше уже отмечалось, что  $\omega_{k1}(h)$  и  $\omega_{k2}(h)$  — два соседних нечетных решения уравнения (3.35). Понятно, что при некоторых значениях  $h$  нечетное и четное решения (3.35) могут совпадать, и  $\omega_{k1}(h)$  становится в этом случае кратным корнем. При увеличении  $h$  соответствующий корень  $\omega_{k1}(h)$  перестает существовать. Таким образом, для определения крайних точек описанных кривых можно воспользоваться системой (3.42), дополненной уравнением

$$\varphi'(\omega_1) = -b(h \sin \omega_1 h + t \sin \omega_1) = 0. \quad (3.45)$$

После несложных преобразований системы (3.42) и уравнения (3.45) для отыскания  $k$ -ой крайней точки получаем систему

$$\begin{aligned} \cos \omega_2 h + t \cos \omega_2 &= 0, \\ \omega_2(t \sin \omega_1 + \sin \omega_1 h) &= \omega_1(t \sin \omega_2 + \sin \omega_2 h), \\ \omega_1 &= 2\pi k - \arccos \left[ -\sqrt{\frac{t^2 - h^2}{t^2(1 - h^2)}} \right], \\ h\omega_1 &= \arccos \left[ \sqrt{\frac{t^2 - h^2}{1 - h^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

которая может быть решена численно. В таблице 3.1 приведены координаты конечных точек первых четырех нейтральных кривых, вычисленные в соответствии с (3.46). При достаточно большом  $k$  выполнено следующее утверждение.

Таблица 3.1.

№ кривой	$h$	$a$	$r$	$\omega_1$	$\omega_2$
1	0.2995	0.3447	8.9792	3.6738	6.8154
2	0.1359	0.2001	14.7813	9.9848	13.1263
3	0.0880	0.1402	20.9531	16.2720	19.4136
4	0.0651	0.1079	27.1863	22.5565	25.6981

**Лемма 6.** Пусть  $k$  — номер нейтральной кривой на плоскости параметров  $t, h$ , тогда для конечных точек этих кривых при достаточно большом  $k$  выполнены следующие асимптотические формулы:

$$t_k = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{8k} \left( 1 - \frac{\pi + 2\omega_0}{4\pi k} + O(k^{-2}) \right), \quad (3.47)$$

$$h_k = \frac{1}{4k} - \frac{\pi + 2\omega_0}{16\pi k^2} + \frac{(\pi + 2\omega_0)^2}{64\pi^2 k^3} + O(k^{-4}), \quad (3.48)$$

где  $\omega_0 = -\arccos \left[ -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \right]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . При этом для  $\omega_1, \omega_2, r$  выполнено

$$\omega_{k1} = 2\pi k + \omega_0 + O(k^{-2}), \quad (3.49)$$

$$\omega_{k2} = (2k + 1)\pi + \omega_0 + O(k^{-2}), \quad (3.50)$$

$$br_k = \frac{1}{\pi^2} \left( \pi^2 + 4 + 2\sqrt{\pi^2 + 4} \right) \left( 2\pi k - \omega_0 + O(k^{-1}) \right). \quad (3.51)$$

*Доказательство.* Для доказательства в формулы (3.46) подставляются разложения величин  $t, h, \omega_1, \omega_2$  в ряды по  $k$  и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях. Разложение для  $r$  получается после подстановки полученных асимптотик в формулу (3.36).

С помощью утверждений лемм 5, 6 удается ответить на вопрос о характере потери устойчивости ненулевого состояния равновесия уравнения (3.32).

**Теорема 6.** Потеря устойчивости состояния равновесия  $N = \frac{1}{a+b}$  уравнения (3.32) не может происходить так, чтобы на мнимой оси находились три пары, а при наличии двух пар не может быть резонансов 1:1 и

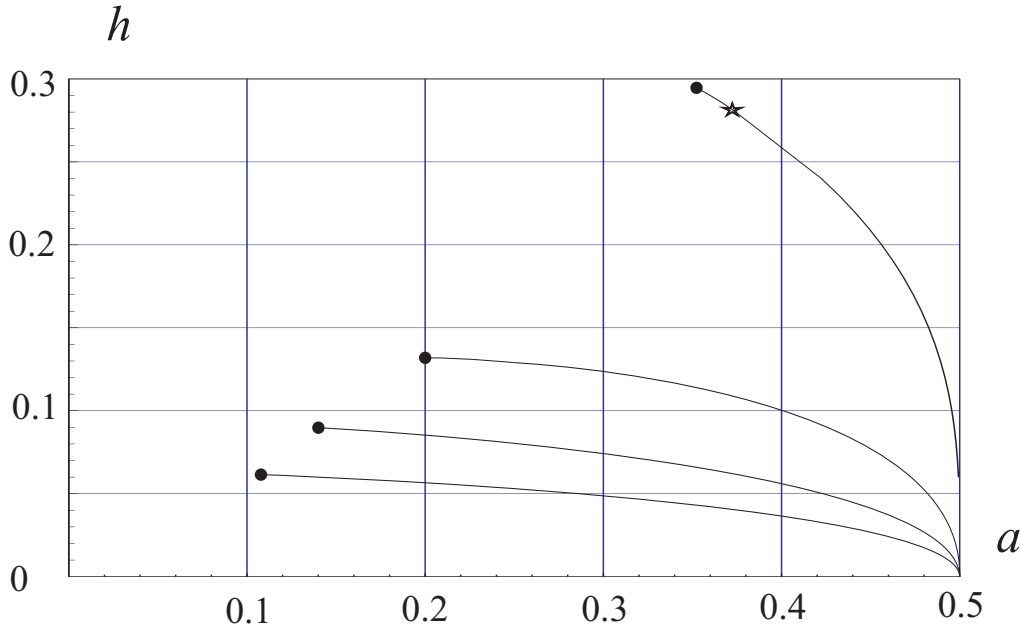


Рис. 3.1. Графики нейтральных кривых

1:3. Резонанс 1:2 реализуется при

$$\frac{a}{b} = \frac{29 - 6\sqrt{6}}{25}, \quad h = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left[ \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{10} \right], \quad \frac{rb}{a+b} = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{6} \omega_0, \quad (3.52)$$

где  $\omega_0 = 2\pi - \arccos \left[ \frac{-2-3\sqrt{6}}{10} \right]$ .

На рис. 3.1 показаны графики нейтральных кривых, для значений параметров  $a$  и  $h$  на которых квазимногочлен (3.34) имеет две пары чисто мнимых корней. Жирные точки на концах кривых соответствуют значениям из таблицы 3.1. Звездочкой на первой кривой обозначена точка, в которой реализуется резонанс 1:2 (см. соотношения (3.52)). В силу лемм 5, 6 таких кривых счетное число, причем на каждой из них  $a \rightarrow 0.5$  при  $h \rightarrow 0$ . При малых  $h$  эти кривые  $a_k = a_k(h)$  не пересекаются в силу соотношений (3.38) и (3.43) леммы 5.

При значениях  $h$  не близких к нулю и к крайним точкам (3.47), (3.48) для построения нейтральных кривых использовались численные методы. Оказалось, что кривые не пересекаются при всех  $h$ , для которых определена каждая из них.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть  $a, h$  принадлежат одной из построенных выше кривых. Обозначим через  $\pm i\omega_1$  и  $\pm i\omega_2$  корни квазимногочлена (3.34) и проверим отсутствие резонансов 1:1 и 1:3.

Предположим, что имеет место резонанс 1:1, т.е.  $i\omega = i\omega_1 = i\omega_2$  — корень кратности два квазимногочлена (3.34). В этом случае в дополнение к (3.35), (3.36) должны выполняться равенства

$$\varphi'(\omega) = 0, \quad r(h \cos \omega h - a \cos \omega) = 1. \quad (3.53)$$

Имеем

$$\varphi''(\omega) = (1 - h^2) \cos \omega h. \quad (3.54)$$

Далее, так как  $r > 0$ , а  $0 < h < 1$ , то из (3.35) и второго равенства (3.53) следует, что  $\cos \omega h < 0$ . Тем самым, в силу (3.54), имеем  $\varphi'(\omega) < 0$ . Это означает, что  $\omega$  — корень (3.35) с четным номером. Согласно (3.37) отсюда следует, что при прохождении  $r$  через  $r(\omega)$  корни из правой полуплоскости подходят к мнимой оси, касаются ее и при дальнейшем увеличении  $r$  снова уходят вправо. Поэтому существует такое  $r < r(\omega)$ , что пара корней (3.34) находится на мнимой оси. Получили противоречие.

Невозможность резонанса 1:3 доказывается также от противного. Предположим, что  $3\omega_1 = \omega_2$ . Из (3.35) легко выходит, что

$$4b^2(b^2 - a^2) \cos^3 \omega_1 h = 0, \quad 4a^2(b^2 - a^2) \cos^3 \omega_1 = 0,$$

т.е. либо  $\omega_1 = \pi/2 + \pi n$  и  $\omega_1 h = \pi/2 + \pi m$ , либо  $a = b$ . В первом случае подстановки  $\omega_1, \omega_1 h$  и  $\omega_2, \omega_2 h$  в выражения (3.36) дают величины

$$r(\omega_1) = \frac{\pi + 2\pi n}{2(a(-1)^n + b(-1)^m)}, \quad r(3\omega_1) = \frac{3\pi + 6\pi n}{2(a(-1)^{n+1} + b(-1)^{m+1})},$$

имеющие разные знаки. Учитывая, что  $r > 0$  искомое равенство  $r(\omega_1) = r(3\omega_1)$  невозможно.

В случае  $a = b$  из уравнения (3.35) для  $\omega_1$  имеем

$$\omega_1 \frac{1+h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \text{либо} \quad \omega_1 \frac{1-h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n. \quad (3.55)$$

Нетрудно проверить, что как первое, так и второе соотношение (3.55) влечет равенство нулю  $r(\omega_1)$ , а это, как и в предыдущем случае, противоречит условию положительности  $r$ .

Утверждение теоремы о значениях параметров, при которых реализуется резонанс 1:2, проверяется непосредственно.

### Построение нормальной формы

Для исследования окрестности нетривиального состояния равновесия уравнения (3.30) при условии (3.31) выполним замену  $N = 1 + n$ , откуда

$$\dot{n} = -r[an(t-1) + (1-a)n(t-h)](1+n). \quad (3.56)$$

Предположим, что параметры  $a_0$  и  $h_0$  выбраны принадлежащими одной из критических кривых, описанных выше, тогда по формуле (3.36) можно найти такое  $r_0$ , при котором характеристический квазимногочлен (3.34) имеет две пары чисто мнимых корней  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$ . Предположим, кроме того, что условия (3.52) существования резонанса 1:2 не выполнены.

Рассмотрим возмущенную задачу (3.56) в близком к критическому случае  $r = r_0 + \varepsilon_1$ ,  $a = a_0 + \varepsilon_2$ ,  $h = h_0 + \varepsilon_3$ . Порядки малости параметров надкритичности естественно принять одинаковыми, следовательно, будем считать выполненными соотношения  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha\varepsilon$ ,  $\varepsilon_3 = \beta\varepsilon$ .

Для построения нормальной формы задачи (3.56) в окрестности тривиального состояния равновесия выполним замену

$$n(t) = \sqrt{\varepsilon}(z_1(s) \exp(i\omega_1 t) + \bar{z}_1(s) \exp(-i\omega_1 t) + z_2(s) \exp(i\omega_2 t) + \bar{z}_2(s) \exp(-i\omega_2 t)) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \dots, \quad (3.57)$$

где  $s = \varepsilon t$ . Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  приводит на первом шаге к верному тождеству. На втором шаге для определения  $u_1(t, s)$  имеем линейное уравнение с запаздыванием вида

$$\begin{aligned} Lu_1 \equiv \dot{u}_1 + r_0[a_0 u_1(t-1, s) + (1-a_0)u_1(t-h_0, s)] = \\ = -r_0(z_1 \exp(i\omega_1 t) + z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) \times \\ \times [a_0(z_1 \exp(i\omega_1(t-1))) + z_2 \exp(i\omega_2(t-1))] + \\ + (1-a_0)(z_1 \exp(i\omega_1(t-h_0)) + z_2 \exp(i\omega_2(t-h_0))) + \text{к.с.}], \quad (3.58) \end{aligned}$$

где к.с. обозначено выражение комплексно сопряженное к выражению, находящемуся в тех же скобках.

Определяя решение уравнения (3.58), в виде суммы гармоник, на которые распадается его правая часть, получаем следующее выражение для



функции  $u_1$ :

$$u_1 = \frac{i\omega_1}{P(2i\omega_1)} z_1^2 \exp(2i\omega_1 t) + \frac{i\omega_2}{P(2i\omega_2)} z_2^2 \exp(2i\omega_2 t) + \\ + \frac{i(\omega_1 + \omega_2)}{P(i(\omega_1 + \omega_2))} z_1 z_2 \exp(i(\omega_1 + \omega_2)t) + \\ + \frac{i(\omega_1 - \omega_2)}{P(i(\omega_1 - \omega_2))} z_1 \bar{z}_2 \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) + \text{к.с.} \quad (3.59)$$

Наконец, на третьем шаге в результате приравнивания коэффициентов при  $\varepsilon^{3/2}$  получаем уравнение

$$Lu_2 + (z_1' P'(i\omega_1) \exp(i\omega_1 t) + z_2' P'(i\omega_2) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) = \\ = -r_0 (z_1 \exp(i\omega_1 t) + z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) \cdot [a_0 u_1(t-1) + (1-a_0) u_1(t-h_0)] + \\ + \left(u_1 + \frac{1}{r_0}\right) [i\omega_1 z_1 \exp(i\omega_1 t) + i\omega_2 z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}] + \\ + r_0(1-a_0)\beta [i\omega_1 z_1 \exp(i\omega_1(t-h_0)) + i\omega_2 z_2 \exp(i\omega_2(t-h_0)) + \text{к.с.}] - \\ - r_0\alpha [z_1 \exp(i\omega_1 t)(\exp(i\omega_1) - \exp(i\omega_1 h_0)) + \\ + z_2 \exp(i\omega_2 t)(\exp(i\omega_2) - \exp(i\omega_2 h_0)) + \text{к.с.}]. \quad (3.60)$$

Здесь штрихом обозначены производные функций  $z_1(s)$ ,  $z_2(s)$  по  $s$ , а  $P'(i\omega) = 1 - r_0(a_0 \exp(-i\omega) + (1-a_0)h_0 \exp(-i\omega h_0))$  — производная квазимногочлена (3.34). Из условий разрешимости уравнения (3.60) в классе ограниченных по  $t$  функций получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_1' = \Phi_1 z_1 + (A_{11} z_1^2 + A_{12} z_2^2) z_1, \\ z_2' = \Phi_2 z_2 + (A_{21} z_1^2 + A_{22} z_2^2) z_2, \quad (3.61)$$

представляющая собой укороченную нормальную форму задачи (3.56). Параметры системы (3.61) вычисляются по формулам

$$\Phi_j = \frac{1}{P'(i\omega_j)} \left( \frac{i\omega_j}{r_0} + r_0(\alpha(\exp(i\omega_j h_0) - \exp(i\omega_j)) + \beta i\omega_j(1-a_0) \exp(i\omega_j h_0)) \right),$$

$$A_{jk} = -\frac{1}{P'(i\omega_j)} \left( 2i\omega_j + \frac{(\omega_1 + \omega_2)\omega_j}{P(i(\omega_1 + \omega_2))} + \frac{(\omega_j - \omega_k)\omega_j}{P(i(\omega_j - \omega_k))} \right),$$

$$A_{jj} = -\frac{1}{P'(i\omega_j)} \left( i\omega_j + \frac{\omega_j^2}{P(2i\omega_j)} \right), \quad j, k = 1, 2, j \neq k.$$

Для упрощения системы (3.61) выполним в ней полярную замену  $z_j = \xi_j \exp(i\tau_j)$ ,  $j = 1, 2$ . В полученной системе

$$\dot{\xi}_1 = \varphi_1 \xi_1 + (a_{11} \xi_1^2 + a_{12} \xi_2^2) \xi_1, \quad (3.62)$$

$$\dot{\xi}_2 = \varphi_2 \xi_2 + (a_{21} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2) \xi_2, \quad (3.63)$$

$$\dot{\tau}_1 = \psi_1 + b_{11} \xi_1^2 + b_{12} \xi_2^2, \quad (3.64)$$

$$\dot{\tau}_2 = \psi_2 + b_{21} \xi_1^2 + b_{22} \xi_2^2, \quad (3.65)$$

где  $\varphi_j + i\psi_j = \Phi_j$ ,  $a_{jk} + ib_{jk} = A_{jk}$ ,  $j, k = 1, 2$ , первые два уравнения не зависят от третьего и четвертого, поэтому их можно изучать отдельно.

Рассмотрим задачу качественного анализа системы (3.62)-(3.63) в зависимости от параметров  $h_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Напомним, что для выбранной кривой вырождения и фиксированного  $h_0$  могут быть найдены величины  $a_0, r_0, \omega_1, \omega_2$  (см. результаты предыдущего пункта), а по ним — коэффициенты системы (3.62)-(3.65)  $a_{ij}(h_0)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Коэффициенты линейной части системы будем рассматривать как функции не только  $h_0$ , но также  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\varphi_j = \varphi_j(h_0, \alpha, \beta)$ .

Двумерная система (3.62)-(3.63) подробно изучена, например, в [9]. Для ее качественного анализа решающее значение имеет, с одной стороны, диссипативность, а с другой — существование и устойчивость состояний равновесия с неотрицательными координатами.

Необходимым условием диссипативности (3.62)-(3.63) является отрицательность коэффициентов  $a_{11}(h_0), a_{22}(h_0)$ . Это условие выполнено для всех значений параметров, лежащих на первой кривой,  $h_0 \in (0, h_{11})$ , где  $h_{11} \approx 0.2995$  — граничная точка (см. таблицу 3.1), кроме того, на этой кривой сохраняют знак величины  $\varphi_j(h_0, 0, 0) > 0$ ,  $j = 1, 2$ . Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $i \neq j$  в свою очередь меняют знак на промежутке  $h_0 \in (0, h_{11})$ , причем

$$a_{12}(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{13}, h_{11}), \quad a_{12}(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{13}), \quad (3.66)$$

$$a_{21}(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{14}, h_{11}), \quad a_{21}(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{14}), \quad (3.67)$$

где  $h_{13} \approx 0.247$ ,  $h_{14} \approx 0.116$ . Таким образом, на промежутке  $(0, h_{13})$  хотя бы одно из чисел  $a_{12}$  или  $a_{21}$  отрицательно, поэтому система (3.62)-(3.63) диссипативна. На промежутке же  $(h_{13}, h_{11})$  эти числа положительны, и, следовательно, необходимо дополнительно проверить условие Каменкова

$$\Delta(h_0) \equiv a_{11}(h_0)a_{22}(h_0) - a_{12}(h_0)a_{21}(h_0) > 0.$$

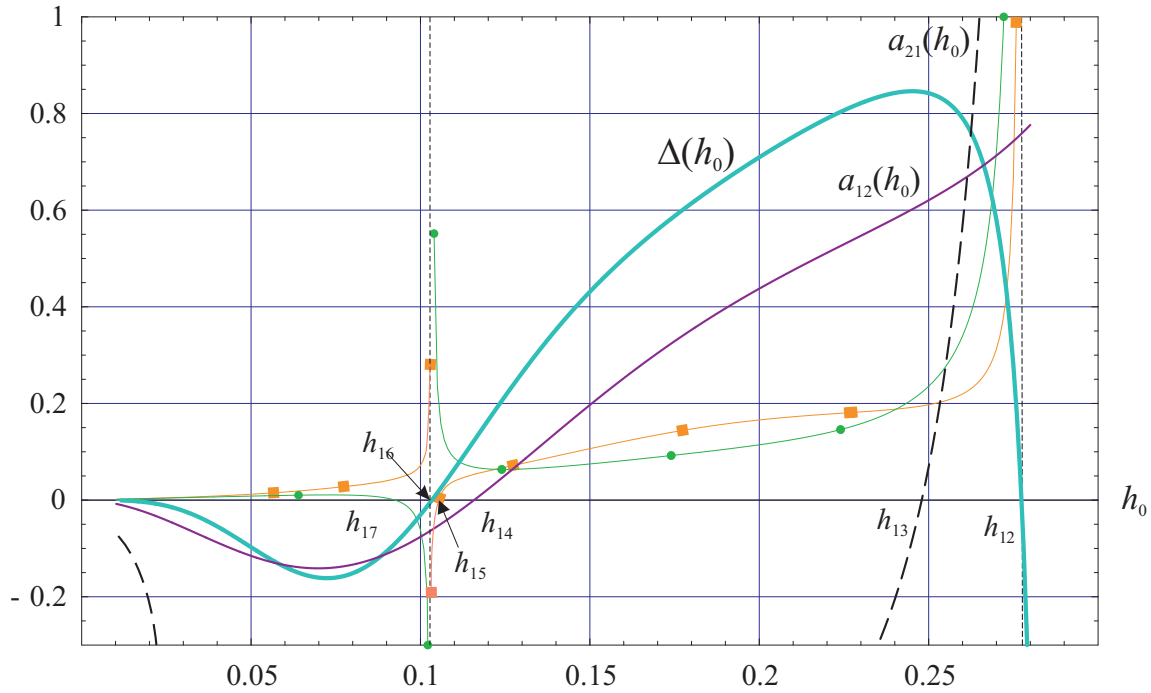


Рис. 3.2. Графики зависимостей величин  $\Delta$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ ,  $\frac{\Delta_2}{\Delta}$  от параметра  $h_0$  для первой кривой вырождения

Непосредственные вычисления показали, что

$$\Delta(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{15}, h_{12}) \text{ и}$$

$$\Delta(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{15}) \cup (h_{12}, h_{11}), \quad (3.68)$$

где  $h_{12} \approx 0.277$ . Следовательно, для значений параметров на первой кривой вырождения нормальная форма (3.62)-(3.63) диссипативна при  $h_0 \in (0, h_{12})$  и не диссипативна при  $h_0 \in (h_{12}, h_*) \cup (h_*, h_{11})$ . Точка  $h_* \approx 0.287189$  соответствует резонансу 1:2 (см. формулы (3.52)), и для нее нормальная форма выглядит иначе.

Перейдем к вопросу существования и устойчивости состояний равновесия (3.62)-(3.63). Наряду с тривиальным состоянием равновесия  $(0, 0)$  данная система может иметь еще три неподвижные точки:

$$\left(0, \sqrt{-\frac{\varphi_2}{a_{22}}}\right), \left(\sqrt{-\frac{\varphi_1}{a_{11}}}, 0\right), \left(\sqrt{-\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \sqrt{-\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right), \quad (3.69)$$

где  $\Delta_1 = -\varphi_1 a_{22} + \varphi_2 a_{12}$ ,  $\Delta_2 = -\varphi_2 a_{11} + \varphi_1 a_{21}$

Фазовый портрет нормальной формы (3.62), (3.63) полностью определяется значениями параметров  $r_0$ ,  $a_0$ ,  $h_0$ . При значениях  $h_{15} < h_0 < h_{12}$  и

$a_0(h_0)$ , принадлежащих первой кривой вырождения, оказывается, что система (3.62), (3.63) имеет фазовый портрет, изображенный на рис. 1.1. Это означает, что исходное уравнение с запаздыванием (3.56) должно иметь при значениях параметров близких к критическим устойчивые двухчастотные колебания. Обозначим  $\xi_{10} = \sqrt{-\frac{\Delta_1}{\Delta}}$ ,  $\xi_{20} = \sqrt{-\frac{\Delta_2}{\Delta}}$  координаты устойчивого состояния равновесия системы (3.62), (3.63), тогда исходная задача (3.56) также будет иметь устойчивое двухчастотное решение с асимптотикой

$$\begin{aligned} n(t) = & \sqrt{\varepsilon}\xi_{10} \cos(\tau_1\omega_1) + \sqrt{\varepsilon}\xi_{20} \cos(\tau_2\omega_2) + \\ & + \varepsilon\xi_{10}\xi_{20} [De^{i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)} + Ee^{i(\omega_1\tau_1-\omega_2\tau_2)} + \text{к.с.}] + \\ & + \xi_{10}^2(Ae^{2i\omega_1\tau_1} + \bar{A}e^{-2i\omega_1\tau_1}) + \xi_{20}^2(Ae^{2i\omega_2\tau_2} + \bar{A}e^{-2i\omega_2\tau_2}) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t(1 + (b_{11} + \alpha b_{12} + c_{11}\xi_1^2 + c_{12}\xi_2^2)\varepsilon) + \varphi_1, \\ \tau_2 &= t(1 + (b_{21} + \alpha b_{22} + c_{21}\xi_1^2 + c_{22}\xi_2^2)\varepsilon) + \varphi_2, \end{aligned}$$

а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — начальные фазы.

### 3.4 Резонанс 1:2 в уравнении второго порядка с периодически возмущенным запаздыванием

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + [B + G(x(t-h(t)), \dot{x}(t-h(t)))]\dot{x}(t-h(t)) = 0, \quad (3.70)$$

где запаздывание может быть представлено в виде  $h(t) = h + a \sin(\omega t)$ , а  $A, B, h, a, \omega$  — положительные параметры ( $h > a$ ),

$$G(x_1, x_2) = g_{10}x_1 + g_{01}x_2 + g_{20}x_1^2 + g_{11}x_1x_2 + g_{02}x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)$$

— достаточно гладкая нелинейная функция. Уравнения вида (3.70) возникают при моделировании электронных устройств с активными нелинейными элементами и запаздыванием в цепи обратной связи [32, 33].

Будем интересоваться возможностью существования в уравнении (3.70) сложных, в том числе хаотических, колебаний. В качестве метода исследований используется метод интегральных многообразий и теория бифуркаций применительно к системам с распределенными параметрами.

**2. Линейный анализ.** Рассмотрим линейную часть уравнения (3.70), причем будем считать, что запаздывание постоянно, т.е.  $a = 0$ . В результате имеем уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + B\dot{x}(t - h) = 0, \quad (3.71)$$

характеристический квазимногочлен которого имеет вид

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + B\lambda \exp(-\lambda h). \quad (3.72)$$

Устойчивость нулевого решения уравнения (3.71) определяется, как известно, расположением корней квазимногочлена (3.72). В [33] методом  $D$ -разбиений проведен подробный анализ расположения корней функции  $P(\lambda)$  в зависимости от значений входящих параметров. В частности, показано, что при

$$h = \sqrt{(3\pi - \alpha_0)(\pi + \alpha_0)}, \quad B = A\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_0)}, \quad (3.73)$$

где  $0 < \alpha_0 < \pi/2$  – решение уравнения  $Ah(\pi - \alpha_0) \operatorname{tg}(\alpha_0) = 2$ , характеристический квазимногочлен (3.72) имеет две пары комплексно сопряженных корней вида:

$$\pm i\sigma_1 = \pm i(\pi + \alpha_0)/h, \quad \pm i\sigma_2 = \pm i(3\pi - \alpha_0)/h. \quad (3.74)$$

При этом остальные его корни лежат в левой открытой комплексной полуплоскости. Отметим, что корни квазимногочлена могут находиться в резонансном соотношении, например, при  $h = 4\sqrt{2}\pi/3$ ,  $A = \sqrt{6}/6$ ,  $B = \sqrt{6}/3$  имеем  $\sigma_1 = \sqrt{2}/2$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{2}$ . Это означает, что имеет место внутренний резонанс 1:2. Важно подчеркнуть, что внутреннего резонанса 1:3 в (3.72) реализовано быть не может.

Итак, потеря устойчивости нулевого решения уравнения (3.70) может приводить к возникновению сложных автоколебательных решений. Перейдем к изучению локальной динамики (3.70) в этом случае.

Выберем коэффициенты уравнения (3.71) согласно (3.73), обозначив при этом  $A = A_0$ ,  $B = B_0$ ,  $h = h_0$  и исключив из рассмотрения случай внутреннего резонанса 1:2. Тем самым характеристическое уравнение (3.72) имеет две пары чисто мнимых корней (3.74), для которых  $\sigma_1/\sigma_2 \neq 1, 2, 3$ , т.е. отсутствуют „главные“ внутренние резонансы. Остальные корни уравнения

(3.72) лежат в этом случае в левой комплексной полуплоскости и отделены от мнимой оси.

Введем малый параметр  $0 < \varepsilon \ll 1$  и положим в (3.72)

$$A = A_0 + \varepsilon A_1, \quad B = B_0 + \varepsilon B_1, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1. \quad (3.75)$$

При этом левую часть (3.72) обозначим  $P(\lambda, \varepsilon)$ . Считая  $\lambda_j(\varepsilon) = i\sigma_j + \varepsilon\lambda_j^1 + \dots$  ( $j = 1, 2$ ), вычислим величины  $\lambda_j^1$ . Из равенства  $P(\lambda(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  имеем

$$\lambda_j^1 = -\frac{P'_\varepsilon(i\sigma_j, 0)}{P'_\lambda(i\sigma_j, 0)} = -\frac{A_1 i\sigma_j + (B_1 i\sigma_j + B_0 h_1 \sigma_j^2) \exp(-i\sigma_j h_0)}{P'_\lambda(i\sigma_j, 0)}, \quad (3.76)$$

где

$$P'_\lambda(i\sigma_j, 0) = 2i\sigma_j + A_0 + B_0(1 - i\sigma_j h_0) \exp(-i\sigma_j h_0), \quad (j = 1, 2).$$

Выделив теперь в (3.76)  $\operatorname{Re}(\lambda_j^1)$ , можно заметить, что в зависимости от выбора  $A_1, B_1, h_1$  она может быть величиной любого знака.

**3. Построение нормальной формы.** Положим в (3.70)  $A, B, h$  согласно (3.75) и  $a = \varepsilon a_1$ . Перейдем теперь от (3.70) к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (3.77)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{s=0} = l(t, u(t, s); \varepsilon). \quad (3.78)$$

Здесь  $u(t, s) = \operatorname{col}(u_1(t, s), u_2(t, s)) = \operatorname{col}(x(t + s), \dot{x}(t + s))$ ,  $h(t, \varepsilon) = h + \varepsilon a_1 \sin(\omega t)$ ,  $-h(t, \varepsilon) \leq s \leq 0, t \geq 0$ . Гладкий нелинейный функционал  $l(t, u(s); \varepsilon)$  действующий из  $C(-h(t; \varepsilon), 0)$  в  $\mathbb{R}^2$ , имеет вид

$$l(t, u(s); \varepsilon) = l_1(t, u(s); \varepsilon) + l_2(t, u(s); \varepsilon) + l_3(t, u(s); \varepsilon) + \dots \quad (3.79)$$

В правой части (3.79) выделены соответственно линейная, квадратичная и кубическая составляющие. Точками обозначены слагаемые, имеющие по  $u(s)$  более высокий порядок малости. При этом из (3.70) и (3.75) имеем

$$\begin{aligned} l_1(u(s)) &= l_1(t, u(s); \varepsilon) = \\ &= \operatorname{col}(u_2(0), -(A_0 + \varepsilon A_1)u_2(0) - u_1(0) - (B_0 + \varepsilon B_1)u_2(t, -h(t, \varepsilon))), \\ l_2(u(s)) &= l_2(t, u(s); 0) = \operatorname{col}(0, -(g_{10}u_1(-h_0) + g_{01}u_2(-h_0))u_2(-h_0)), \\ l_3(u(s)) &= l_3(t, u(s); 0) = \end{aligned}$$

$$= \text{col}(0, -(g_{20}u_1^2(-h_0) + g_{11}u_1(-h_0)u_2(-h_0) + g_{02}u_2^2(-h_0))u_2(-h_0)).$$

Краевая задача (3.77)-(3.78) (соответственно и уравнение (3.70)) имеет [34] в окрестности нуля фазового пространства  $C(-h(t; \varepsilon), 0)$  четырехмерное  $2\pi/\omega$ -периодическое локальное устойчивое гладкое интегральное многообразие  $\Phi(\tau, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s; \varepsilon)$  ( $\tau = \omega t, z_j \in \mathbb{C}$ ), поведение решений на котором определяет поведение решений краевой задачи (3.77)-(3.78). Здесь  $\Phi(\cdot)$  – гладкий по совокупности переменных оператор,  $2\pi$ -периодический по  $\tau$ .

Рассмотрим случай, когда  $\omega$  близко к  $2\sigma_1 + \sigma_2$ . В этой ситуации положим  $\omega = 2\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon\delta$ , считая  $\delta$  расстройкой. С учетом этого построим уравнения траекторий краевой задачи (3.77)-(3.78) на интегральном многообразии. Введем в рассмотрение следующее разложение:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s; \varepsilon) &= (u_{10}(s) + \varepsilon u_{10}^1(\tau, s) + \dots)z_1 + \\ &+ (u_{01}(s) + \varepsilon u_{01}^1(\tau, s) + \dots)z_2 + (\bar{u}_{10}(s) + \varepsilon \bar{u}_{10}^1(\tau, s) + \dots)\bar{z}_1 + \\ &+ (\bar{u}_{01}(s) + \varepsilon \bar{u}_{01}^1(\tau, s) + \dots)\bar{z}_2 + (u_{20}(s) + \dots)z_1^2 + (u_{11}(s) + \dots)z_1z_2 + \dots \\ &u_*(\tau, s) \equiv u_*(\tau + 2\pi, s) \end{aligned} \quad (3.80)$$

и систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{z}_1 = (i\sigma_1 + \varepsilon\lambda_1^1 + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + A_1\bar{z}_1\bar{z}_2 \exp(i\omega t) + \dots \quad (3.81)$$

$$\dot{z}_2 = (i\sigma_2 + \varepsilon\lambda_2^1 + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + A_2\bar{z}_1^2 \exp(i\omega t) + \dots \quad (3.82)$$

В (3.81)-(3.82) точками обозначены слагаемые, имеющие по соответствующим переменным более высокий порядок малости. В явном виде приведены лишь „главные“ слагаемые разложений. При этом

$$u_{10}(s) = \text{col}(1, i\sigma_1) \exp(i\sigma_1 s), \quad i\sigma_1 u_{10}(0) = l_1(u_{10}(s)),$$

$$u_{01}(s) = \text{col}(1, i\sigma_2) \exp(i\sigma_2 s), \quad i\sigma_2 u_{01}(0) = l_1(u_{01}(s)).$$

Подставим функцию  $\Phi(\cdot)$ , определяющую интегральное многообразие, в виде (3.80) в краевую задачу (3.77)-(3.78). Имеем тождество

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_1} \dot{\bar{z}}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_2} \dot{\bar{z}}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (3.83)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{s=0} = l(t, \Phi(\omega t, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s; \varepsilon); \varepsilon). \quad (3.84)$$

Здесь  $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{\bar{z}}_1, \dot{\bar{z}}_2$  определяются согласно (3.81)-(3.82). Приравнивая теперь в (3.83)-(3.84) слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \varepsilon \bar{z}_1, \varepsilon \bar{z}_2, z_1^2, z_1 z_2, \dots$ , будем получать на каждом шаге краевую задачу вида

$$(p_1 i \sigma_1 + p_2 i \sigma_2) u_*(s) = \frac{\partial u_*}{\partial s}, \quad (3.85)$$

$$\left. \frac{\partial u_*}{\partial s} \right|_{s=0} = l_1(u_*(s)) + f_*, \quad (3.86)$$

где  $p_1, p_2$  – целые числа,  $f_*$  – фиксированный вектор, зависящий от коэффициентов правых частей (3.81)-(3.82) как от параметров. Условия разрешимости (3.85)-(3.86) обеспечивают однозначное определение коэффициентов системы уравнений (3.81)-(3.82). Опуская громоздкие выкладки, приведем их окончательный вид:

$$d_{11} = \Theta(\sigma_1)/P'_\lambda(i\sigma_1; 0), \quad d_{12} = \Psi(\sigma_1, \sigma_2)/P'_\lambda(i\sigma_1; 0),$$

$$d_{21} = \Psi(\sigma_2, \sigma_1)/P'_\lambda(i\sigma_2; 0), \quad d_{22} = \Theta(\sigma_2)/P'_\lambda(i\sigma_2; 0),$$

$$A_1 = \frac{-ia_1 F_1}{2P'_\lambda(i\sigma_1; 0)}, \quad A_2 = \frac{-ia_1 F_2}{2P'_\lambda(i\sigma_2; 0)},$$

где

$$\Theta(\sigma) = \frac{-1 - 4g_{10}\sigma^2 + i3g_{01}\sigma}{P(2i\sigma)} g_{10}\sigma^2 \exp(i\sigma h) + \\ + (g_{11}\sigma + i(g_{20} + (2g_{10}g_{01} + 3g_{02})\sigma^2))\sigma \exp(-i\sigma h),$$

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{(ig_{10}\sigma_1 + 2g_{11}\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2))(-ig_{10}(\sigma_1 + \sigma_2) + 2g_{01}\sigma_1\sigma_2)}{P'_\lambda(i(\sigma_1 + \sigma_2); 0)} \exp(i\sigma_2 h) - \\ - \frac{(g_{10}(2\sigma_1 - \sigma_2) + 2g_{11}\sigma_2)(g_{10}(\sigma_1 - \sigma_2) - 2ig_{01}\sigma_1\sigma_2)}{P'_\lambda(i(\sigma_1 - \sigma_2); 0)} \exp(-i(2\sigma_1 - \sigma_2)h) + \\ + (2g_{10}\sigma_1g_{01}\sigma_2^2 + 2ig_{20}\sigma_1 + g_{11}\sigma_2^2 + 3ig_{02}\sigma_1^3) \exp(-i\sigma_1 h),$$

$$F_1 = (-g_{10}(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 2ig_{01}(\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_2)) \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2)h),$$

$$F_2 = (-2g_{10}\sigma_1^2 + ig_{01}\sigma_1^3) \exp(2i\sigma_1 h).$$

В заключение пункта отметим, что „грубым“ (т.е. экспоненциально устойчивым или неустойчивым) состояниям равновесия, циклам и инвариантным



торам системы уравнений (3.81)-(3.82) в уравнении (3.70) при малых  $\varepsilon$  соответствуют такие же установившиеся режимы, той же устойчивости. Для хаотических установившихся режимов это, вообще говоря, не верно и требует отдельной проверки.

**4. Бифуркационный анализ нормальной формы.** В дальнейшем считаем, что  $g_{jk} = g_{jk}^* \varepsilon^{1/2}$  ( $j, k = 0, 1$ ). В этих условиях положим  $z_j = \varepsilon^{1/2} \rho_j \exp(i\tau_j)$  ( $j = 1, 2$ ),  $t \rightarrow \varepsilon^{-1}t$  и выделим в (3.81)-(3.82) главную часть уравнений для „медленных переменных“  $\rho_1, \rho_2, \theta = \omega - 2\tau_1 - \tau_2$ .

В результате имеем

$$\dot{\rho}_1 = (\tau_1 + a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2) \rho_1 + |b_1|\rho_1\rho_2 \cos(\theta + \gamma_1), \quad (3.87)$$

$$\dot{\rho}_2 = (\tau_2 + a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2) \rho_2 + |b_2|\rho_1^2 \cos(\theta + \gamma_2), \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \delta + (2c_{11} + c_{21})\rho_1^2 + (2c_{12} + c_{22})\rho_2^2 - \\ & - 2|b_1|\rho_2 \sin(\theta + \gamma_1) - |b_2|(\rho_1^2/\rho_2) \sin(\theta + \gamma_2). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Здесь  $\delta = -2\text{Im} \lambda_1^1 - \text{Im} \lambda_2^1$ ,  $\tau_j = \text{Re} \lambda_j^1$ ,  $a_{jk} = \text{Re} d_{jk}^0$ ,  $c_{jk} = -\text{Im} d_{jk}^0$ ,  $b_j^0 = |b_j| \exp(-i\sigma_j)$  ( $j, k = 1, 2$ ).

Параметры системы (3.87)-(3.89) могут меняться в широких пределах, имеются лишь ограничения на  $\tau_1, \tau_2$  и вещественные части ляпуновских величин  $a_{11}, a_{22}$ . Первые два параметра определяют скорость изменения вещественной части корней квазимногочлена (3.71) и для их перехода из левой комплексной полуплоскости в правую должны быть положительными. В свою очередь величины  $a_{11}, a_{22}$  в случае наличия только одной пары чисто мнимых корней характеристического уравнения определяли бы, возникает или нет при потере устойчивости нулевого решения уравнения (3.70) устойчивый цикл. Будем считать, что это так и, следовательно,  $a_{11} < 0$  и  $a_{22} < 0$ .

Рассмотрим фазовые перестройки системы (3.87)-(3.89) при некоторых дополнительных ограничениях на параметры. Предположим, что квазимногочлен (3.72) и нелинейность  $G(x_1, x_2)$  таковы, что вычисленные по ним параметры нормальной формы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau^*, \quad a_{11} = a_{22}, \quad a_{21} = a_{12} = 0, \quad |b_2| = 2|b_1| = b, \quad (3.90)$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma, \quad 2c_{11} + c_{21} = -2c_{12} - c_{22} = c. \quad (3.91)$$

Нормирующие замены переменных  $\rho_j = \xi_j \sqrt{\frac{\tau_j}{a_{jj}}}$ ,  $j = 1, 2$  и  $t \rightarrow \tau^*t$ , позволяют избавиться в (3.87)-(3.89) от параметров  $\tau_1, \tau_2, a_{11}, a_{22}$  и перейти к

системе

$$\dot{\xi}_1 = (1 - \xi_1^2) \xi_1 + 0.5 b \xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \gamma), \quad (3.92)$$

$$\dot{\xi}_2 = (1 - \xi_2^2) \xi_2 + b \xi_1^2 \cos(\theta - \gamma), \quad (3.93)$$

$$\dot{\theta} = \delta + c(\xi_1^2 - \xi_2^2) - b(\xi_2 \sin(\theta + \gamma) + \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\theta - \gamma)). \quad (3.94)$$

Рассмотрим перестройки фазового портрета системы (3.92) - (3.94) при фиксированных значениях параметров  $c$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  и изменении величины  $b$ . Найдем сначала состояния равновесия системы (3.92) - (3.94) и условия их устойчивости.

Все решения алгебраической системы уравнений

$$(1 - \xi_1^2) \xi_1 + 0.5 b \xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \gamma) = 0, \quad (3.95)$$

$$(1 - \xi_2^2) \xi_2 + b \xi_1^2 \cos(\theta - \gamma) = 0, \quad (3.96)$$

$$\delta \xi_2 + c \xi_2 (\xi_1^2 - \xi_2^2) - b (\xi_2^2 \sin(\theta + \gamma) + \xi_1^2 \sin(\theta - \gamma)) = 0 \quad (3.97)$$

удается найти только численно, однако имеется одно решение, допускающее аналитическое представление. Оно получается, если приравнять нулю  $\xi_1$ , тогда  $\xi_2 = 1$ , а  $\theta = \theta^*$ , где  $\theta^*$  удовлетворяет уравнению  $\sin(\theta^* + \gamma) = (\delta - c)/b$ . Состояние равновесия

$$\text{col}(0, 1, \theta^*) \quad (3.98)$$

существует при  $|(\delta - c)/b| \leq 1$ , и для любых значений параметров, удовлетворяющих этому условию, представляет собой седло-узел.

Численный анализ алгебраической системы (3.95) - (3.97) позволяет найти состояния равновесия системы (3.92) - (3.94) и показать, что наряду с точкой (3.98) имеются еще по меньшей мере два состояния равновесия, одно из которых устойчиво при достаточно больших, а другое – при достаточно малых значениях  $b$ .

Рассмотрим теперь характер фазовых перестроек системы (3.92)-(3.94) при изменении  $b$ . Удалось выделить два бифуркационных сценария, которые реализуются при различных значениях  $c$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .

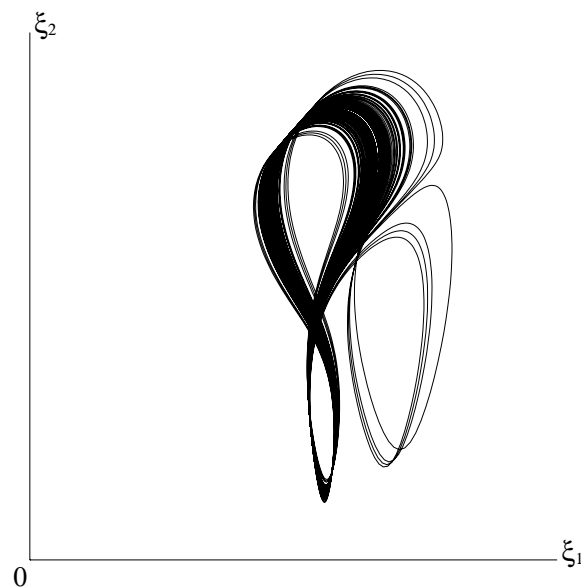


Рис. 3.3. Аттрактор динамической системы (3.92) - (3.94) при  $b = 2.66$ ,  $c = 10$ ,  $\gamma = 2.2$ ,  $\delta = 0$

Для первого сценария характерны следующие бифуркации:

- 1) при  $0 < b < b_1$  устойчиво, причем в пределах точности численного счета глобально, состояние равновесия;
- 2) при  $b = b_1$  происходит колебательная потеря устойчивости этого состояния равновесия и в результате бифуркации Андронова - Хопфа ветвится орбитно асимптотически устойчивый цикл;
- 3) полученный цикл меняется в размерах и исчезает в результате обратной бифуркации Андронова - Хопфа, после чего при  $b > b_2$  устойчивым становится некоторое состояние равновесия.

Второй сценарий связан с возникновением хаотических колебаний. При  $0 < b < b_1$ , как и в предыдущем случае, глобально устойчиво состояние равновесия, а при  $b = b_1$  также возникает устойчивый цикл, однако дальнейшее увеличение  $b$  приводит к усложнению колебаний и возникновению в результате бифуркации расщепления сепаратрис хаотического аттрактора.

Проследим за изменениями числовых характеристик хаотического режима при  $c = 10$ ,  $\gamma = 2.2$ ,  $\delta = 0$ . Вычисления дали следующие значения  $b_1 \simeq 0.905$  и  $b_2 \simeq 3.778$ , при которых происходит прямая и обратная бифуркации Андронова - Хопфа. При  $2.66 < b < 3.1$  решения системы (3.92) - (3.94) совершают неупорядоченные колебания, для выяснения их природы были предприняты вычисления ляпуновских показателей и ляпуновской размерности аттрактора системы. Приведем три наиболее характерные ситуации:

- 1) при  $b = 2.66$   $\lambda_1 = 0.069 \pm 0.001$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -6.589 \pm 0.001$ ,  $d_L \approx 2.01$ ;
- 2) при  $b = 3$   $\lambda_1 = 0.608 \pm 0.002$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -9.208 \pm 0.002$ ,  $d_L \approx 2.066$ ;
- 3) при  $b = 3.09$   $\lambda_1 = 0.34 \pm 0.002$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -8.596 \pm 0.002$ ,  $d_L \approx 2.039$ .

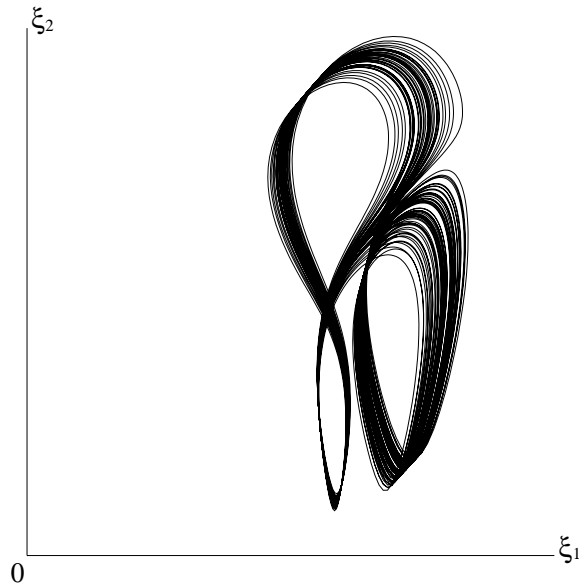


Рис. 3.4. Аттрактор динамической системы (3.92) - (3.94) при  $b = 3$ ,  $c = 10$ ,  $\gamma = 2.2$ ,  $\delta = 0$

На рисунках 3.3 и 3.4 приведены проекции аттрактора динамической системы (3.92) - (3.94) на плоскость  $\xi_1, \xi_2$  в ситуациях 1) и 2). В первом случае (см. рис. 3.3) значение  $b$  выбрано вблизи момента рождения хаотических колебаний, поэтому траектории системы долгое время остаются в некоторой окрестности потерявшего устойчивость цикла и лишь изредка наблюдаются всплески. Именно поэтому старший ляпуновский показатель в этой ситуации относительно мал. Во втором случае (рис. 3.4) наблюдается развитый хаос и старший ляпуновский показатель на порядок больше. Наконец, в третьем случае происходит относительное уменьшение этого показателя.

Дальнейшее увеличение бифуркационного параметра  $b$  приводит к тому, что при  $b > 3.1$  устойчивым остается лишь цикл, который затем стягивается при  $b = b_2 \simeq 3.778$  в состояние равновесия.

На рисунке 3.5 приведен график зависимости старшего ляпуновского показателя аттрактора системы (3.92)-(3.94) от параметра  $b$ . Многократные вычисления с увеличенным разрешением по  $b$  показали, что существует область значений параметров, в которой изменения параметров не приводят к потере хаотического аттрактора, т.е. отсутствуют окна периодичности. В этой ситуации можно предположить, что аттрактору нормальной формы

(3.92)-(3.94) будет соответствовать аттрактор исходной задачи (3.70) с близкими свойствами.

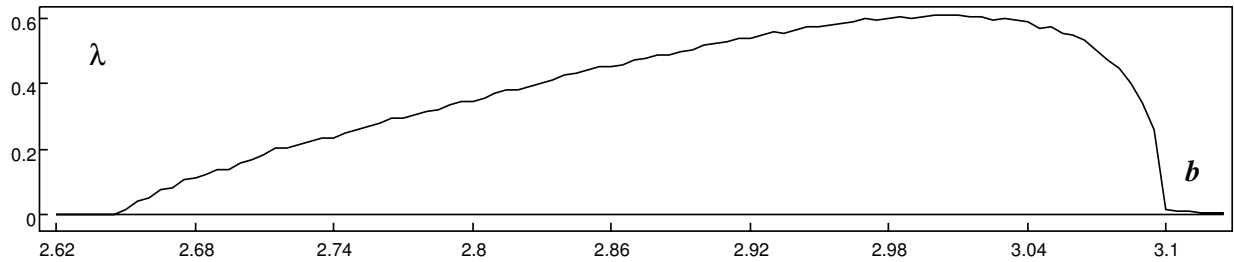


Рис. 3.5. Зависимость старшего ляпуновского показателя аттрактора системы (3.92) - (3.94) от параметра  $2.6 < b < 3.1$  при  $c = 10$ ,  $\gamma = 2.2$ ,  $\delta = 0$

Изменения параметров  $c$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  показали, что при достаточно больших  $c$ , значениях  $\gamma$  из  $(\pi/2, \pi)$ , но не близких к границам этого промежутка и  $|\delta| < 0.5$  хаотический сценарий фазовых перестроек сохраняется.

# Литература

- [1] *Боголюбов, Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский.* — М.: Физматгиз, 1974.
- [2] *Митропольский, Ю.А.* Интегральные многообразия в нелинейной механике / *Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова.* — М.: Наука, 1973.
- [3] *Крылов, Н.М.* Новые методы нелинейной механики / *Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов.* — М.,Л.: ОНТИ, 1934.
- [4] *Брюно, А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / *А.Д. Брюно.* — М.: Наука, 1979.
- [5] *Арнольд, В.И.* Итоги науки и техники: современные проблемы математики, фундаментальные направления. Т. 5. Теория бифуркаций / *В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников.* — М.: ВИНТИ, 1986.
- [6] *Wiggins, Stephen* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos / *Stephen Wiggins.* — Springer-Verlag New York, Inc. 1990.
- [7] *Шильников, Л. П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. / *Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа.* — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [8] *Shilnikov, L. P.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part II. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, 5. / *L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev and L.O. Chua.* — World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [9] *Гукенхеймер, Д.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / *Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс.* — Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

- [10] *Малинецкий, Г.Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / *Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов.* — М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [11] *Йосс, Ж.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / *Ж. Йосс, Д. Джозеф.* — М.: Мир, 1983.
- [12] *Арнольд, В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / *В.И. Арнольд.* М.: Наука, 1978.
- [13] *Колесов, А. Ю.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений / *А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* — М., 2004.
- [14] *Хазин, Л. Г.* Устойчивость критических положений равновесия / *Л.Г. Хазин, Э.Э. Шноль.* — Пущино: НЦБИ АН СССР, 1985.
- [15] *Хазина, Г. Г.* Существенно неоднородные системы в задачах устойчивости / *Г. Г. Хазина, Л. Г. Хазин.* — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1982. Препринт №145.
- [16] *Шноль, Э.Э.* Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений / *Э.Э. Шноль* // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 7. — С. 1156 – 1167.
- [17] *Марсден, Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / *Дж. Марсден, М. Мак-Кракен.* — М.: Мир, 1980.
- [18] *Баутин, Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / *Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович.* — М.: Наука, 1990.
- [19] *Глызин, С. Д.* Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» / *С. Д. Глызин* // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т.33, № 6. — С. 805 – 811.
- [20] *Глызин, С. Д.* Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией / *С. Д. Глызин* // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений: Межвуз. сб. Ярославль, 1986. — С. 112-127.
- [21] *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / *Ф. Хартман.* — М.: Мир, 1970.

- [22] *Куликов, А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве / *А.Н. Куликов* // Исследования по устойчивости и теории колебаний: Межвуз. сб. Ярославль, 1976. С. 67 – 85.
- [23] *Колесов, А.Ю.* Структура окрестности однородного цикла в среде с диффузией / *А.Ю. Колесов* Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1989. — Т. 53, № 2. — С.345 – 362.
- [24] *Мищенко, Е.Ф.* Асимптотическая теория релаксационных колебаний / *Е.Ф. Мищенко, А.Ю. Колесов* // Труды математического ин-та АН СССР. — 1991. — Т. 197. — С. 3 – 89.
- [25] *Hutchinson, G.E.* Circular causal systems in ecology *G.E. Hutchinson* // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1948. — V. 50. — P. 221 - 246.
- [26] *May, R.M.* Stability and complexity in model ecosystem / *R.M. May.* — Princeton: Princeton Univ. Press., 1973.
- [27] *Колесов, Ю.С.* Проблема адекватности экологических уравнений / *Ю.С. Колесов.* — Ярославль, 1985. Деп. в ВИНТИ 1985, №1901-85.
- [28] *Красовский, Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения / *Н.Н. Красовский.* — М.: Физматгиз, 1959.
- [29] *Колесов, А.Ю.* Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента / *А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов* // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 233. — С. 153 – 207.
- [30] *Берже, П.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / *П. Берже, И. Помо, К. Видаль.* — Череповец: Меркурий-Пресс, 2000.
- [31] <http://tracer.narod.ru>
- [32] *Рубаник, В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / *В.П. Рубаник.* — М.: Наука, 1969.
- [33] *Колесов, Ю.С.* Автоколебания в системах с запаздыванием / *Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра.* Вильнюс: Мокслас, 1979.
- [34] *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / *Д. Хенри.* — М.: Мир, 1985.



## Приложение. Программа, написанная для пакета символьных вычислений “Mathematica”

### Определение правых частей

```
n = 2;  
h[x1_, x2_] := {x2 + c x1 + x1 x2 +  $\alpha$  x1 x22 +  $\beta$  x23, -x1 + c x2 +  $\alpha$  x12 x2 +  $\beta$  x13};
```

### Определение состояния равновесия

```
u1=0; u2=0;
```

### Вычисление линейной составляющей

```
Clear[c]  
A00[x1_, x2_] := Transpose[{Derivative[1, 0][h][x1, x2],  
  Derivative[0, 1][h][x1, x2]}]  
A0 = A00[u1, u2]  
A1 =  $\partial_c$  A00[u1, u2]  
{ {c, 1}, {-1, c} }  
{ {1, 0}, {0, 1} }  
Вычисление A0 и A1.  
c=0;  
A0// MatrixForm  
A1// MatrixForm  
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
```

### Определение F<sub>2</sub>(x, x)

```
F22[x1_, x2_] := Transpose[{Derivative[1, 0][A00][x1, x2],  
  Derivative[0, 1][A00][x1, x2]}]  
F2[x_, y_] :=  $\frac{1}{2}$  F22[u1, u2] . x . y  
FullSimplify[F2[{a1, a2}, {a1, a2}]] // MatrixForm  
 $\begin{pmatrix} a1 & a2 \\ 0 & \end{pmatrix}$ 
```

## Определение $F_3(x, x)$

```
F33[x1_, x2_] := Transpose[{Derivative[1, 0][F22][x1, x2],
  Derivative[0, 1][F22][x1, x2]}]
F3[x_, y_, z_] :=  $\frac{1}{6}$  F33[u1, u2].x.y.z
FullSimplify[F3[{a1, a2}, {a1, a2}, {a1, a2}]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a_2^2 (a_1 \alpha + a_2 \beta) \\ a_1^2 (a_2 \alpha + a_1 \beta) \end{pmatrix}$$

## Вычисление собственных значений и векторов

```
t=-CharacteristicPolynomial[A0, x]
 $\omega$ =Im[x/.FullSimplify[Solve[t==0,x]][[2]]]
Null
```

$$\frac{-1-x^2}{1}$$

```
a=Simplify[NullSpace[A0-i  $\omega$  IdentityMatrix[2]]][[1]]
ab=Simplify[NullSpace[Transpose[A0]+i  $\omega$ 
IdentityMatrix[2]]][[1]]
abb=Simplify[a.Conjugate[ab]]
```

$$\begin{pmatrix} \{-i, 1\} \\ \{-i, 1\} \end{pmatrix}$$

Вычисление  $\varphi_0 + i\psi_0 = (A_1 a, b)$

```
Fp=Simplify[A1.a . Conjugate[ab]/abb]
1
FullSimplify[ComplexExpand[Re[Fp]]]
FullSimplify[ComplexExpand[Im[Fp]]]
1
0
```

## Вычисление $d_0 + ic_0$

```

Вычисление (F3 (a, a, ā) + F3 (ā, a, a) + F3 (a, ā, a), b) / (a, b) = F333
w1=Simplify[Inverse[(2i ω IdentityMatrix[2]-
A0)].F2[a,a]];
w0=Simplify[Inverse[-
A0].(F2[a,Conjugate[a]]+F2[Conjugate[a],a])];
N[w1]
N[w0]
F330=Simplify[F3[a,a,Conjugate[a]]+
F3[a,Conjugate[a],a]+F3[Conjugate[a],a,a]+
F2[w1,Conjugate[a]]+F2[Conjugate[a],w1]+F2[w0,a]+F2[a,w0]
];
N[F330]
F331=Simplify[F330.Conjugate[ab]/abb];
N[F331]
d0c0=Simplify[F331];
N[d0c0]
d0=FullSimplify[ComplexExpand[Re[d0c0]]]
c0=FullSimplify[ComplexExpand[Im[d0c0]]]

{-0.666667,0. -0.333333 i}
{0.,0.}
{-0.333333-(0. +1. i) α+3. β,α-(0. +3. i) β}
(0. -0.166667 i)+α
(0. -0.166667 i)+α
α
-1/6

```

Учебное издание

**Глызин Сергей Дмитриевич,  
Колесов Андрей Юрьевич**

**Локальные методы анализа  
динамических систем**

Учебное пособие

Редактор, корректор А. А. Аладьева  
Компьютерный набор, верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 10.12.06. Формат 60×84/16. Бумага Data Copy.  
Усл. печ. л. 5,4. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета.

Отпечатано в типографии ООО „Ремдер“.  
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37.  
Тел. (0852) 73-35-03