Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра математического анализа

В. Е. Балабаев

Базовые элементы финансовой математики

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению
Математика и компьютерные науки

Ярославль 2012

УДК 51:336(072)
ББК У9(2)26я73
Б20

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года

Рецензент
кафедра математического анализа Ярославского
государственного университета им. П. Г. Демидова

Б20 **Балабаев, В. Е. Базовые элементы финансовой математики:** методические указания / В. Е. Балабаев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2012. – 48 с.

В методических указаниях рассматриваются основные понятия финансовой математики: простые и сложные учетные ставки, модели финансовых потоков, кредитные операции. Указания могут быть использованы для аудиторной и самостоятельной работы студентов по курсу «Финансовая математика».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению 010200.62 Математика и компьютерные науки (дисциплина «Финансовая математика», цикл Б3), очной формы обучения.

УДК 51:336(072)
ББК У9(2)26я73

Финансовый анализ кредитной сделки

1. Описание и определяющие параметры кредитной сделки

Рассмотрим одну из основных финансовых операций – *кредитную сделку* и введем ряд понятий, связанных с этой операцией.

Кредитные сделки отличаются большим разнообразием: открытие сберегательного счета в банке, выдача банком кредита, учет векселя и др. Конкретные условия кредитной сделки определяются в соответствующем *финансовом контракте,* который служит ее юридическим обеспечением.

В общем случае *простая кредитная сделка* представляет собой *единовременную* выдачу кредита (займа, ссуды), погашаемого *одним* платежом в *конце срока* сделки и подразумевающего участие в ней двух лиц:

кредитора – лица, предоставляющего в долг финансовые средства (денежные средства или другие активы);

дебитора (заемщика, должника) – лица, получающего финансовые средства в свое распоряжение для временного их использования.

Подразумевается также, что финансовый контракт, на основании которого осуществляется данная кредитная сделка, обусловливает *возврат* дебитором полученного займа *через точно определенный срок* и *плату* в виде *процента* за его использование.

Ясно, что сущность кредитной сделки, например с позиции кредитора, состоит в получении определенной выгоды, которую можно охарактеризовать количественно. Для этого используются следующие основные *временные* и *денежные (финансовые)* параметры кредитной сделки:

t_0 – дата выдачи кредита (ссуды);

T– период времени, на который был выделен кредит;

$t_1 – t_O$ + Т – дата возвращения (погашения) кредита;

P – сумма кредита или основная сумма долга (Principal);

/ – плата за кредит, т. е. *сумма* процентов за период сделки;

S – сумма погашения (полная сумма) долга.

Временная диаграмма сделки изображена на рис. 1.

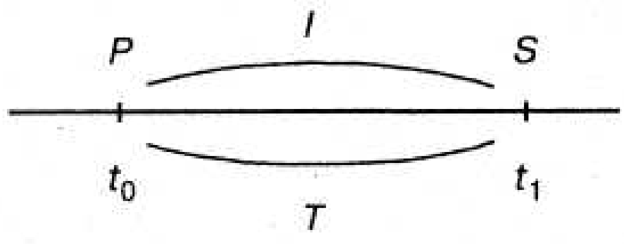

Рис. 1

Поскольку P и S – мгновенные величины, то в дальнейшем будем осуществлять их *привязку к соответствующим моментам времени.* В данном случае

$$P=S_0 \text{ и } S=S_1.$$

Итак, простая кредитная сделка связывает две суммы: величину выданного кредита P и его полную (вместе с процентом) стоимость S*;* при этом очевидно, что

$$S = P+I \tag{1.1}$$

или, учитывая временную привязку,

$$S_1 = S_o + I. \tag{1.2}$$

Поэтому из трех денежных величин независимые только две. Разумеется, наиболее важная из них – процент I, который фактически характеризует результат финансовой сделки. Необходимо указать, что этот результат имеет различное, а точнее, прямо противоположное значение для обоих участников сделки – кредитора и дебитора: для кредитора процент I выражает *доход* от сделанной им инвестиции; для дебитора (заемщика) процент I представляет собой *стоимость кредита* и должен трактоваться им как *издержки* (убытки).

Соотношение (1.1) отражает финансовую сущность простейшей кредитной сделки и называется *основной формулой теории кредитных операций.*

Остановимся теперь на другом, более формализованном, описании кредитной сделки, исходя из понятия финансового потока.

В простой кредитной сделке фигурируют два финансовых события: (t_0, S_o) – выдача (получение) кредита S_0 в момент времени t_0 и (t_1,S_1) – возврат полной суммы S_1 в момент времени $t_1 = t_0 + T$. Объединяя эти события, получим поток событий

$$CF = \{(t_0, S_0),(t_1 , S_1)\}.$$

Этот поток описывает динамику кредита. Долг от начальной величины S_o к концу периода сделки возрастает до величины S_1. Относительно начального момента t_0 сумма S_1 представляет собой *будущую стоимость* долга, а в момент t_1 эта величина определяет *наращенную* или *накопленную стоимость* долга. Формально простую кредитную сделку можно описать как преобразование начальной суммы S_o долга в конечную сумму S_1 долга. Более точно, речь идет о преобразовании не денежных сумм, а финансовых событий, результатом которого является замещение события (t_0, S_0) событием (t_1 ,S_1). Если использовать оператор *FV* для упомянутого преобразования, то его действие можно записать в виде

$$FV_{t_1}(t_0, S_0) = (t_1, S_1) \tag{1.3}$$

В дальнейшем, в тех случаях когда не возникает неоднозначности толкования финансовых событий, будем использовать также упрощенную запись равенства (1.3):

$$\mathrm{FV}_{t_1}(\mathrm{S}_0) = \mathrm{S}_1 \tag{1.4}$$

Таким образом, согласно равенству (1.3) (или (1.4)) оператор FV_1 представляет собой правило замещения финансового события (t_o, S_o) событием (t_1 ,S_1) или капитализации суммы S_0 в кредитной сделке.

Интерпретация кредитной сделки как некоторого преобразования (оператора) может показаться вначале необычной. Однако именно эта точка зрения приводит к более глубокому пониманию смысла математических моделей многих финансовых операций.

В заключение обратимся еще раз к событиям (t_O, S_O) и (t_1, S_1), составляющим поток, описывающий рассмотренную выше модель динамики наращения долга. Из описания потока следует, что обе суммы S_0, S_1 рассматриваются как *положительные.* Однако в тех случаях, когда кредитная сделка рассматривается с точки зрения полученного дохода (для кредитора) или понесенных убытков (с точки зрения должника), указанные выше суммы могут браться с противоположными знаками. Так, с позиции кредитора выдаваемая им сумма S_o означает *расход,* тогда как возвращаемая сумма S_1 – *приход.* Поэтому кредитная сделка, с точки зрения кредитора, может быть представлена диаграммой (рис. 2), где начальная сумма берется со знаком минус, а конечная – со знаком плюс. В этом случае поток

$$\{(t_0, -S_0), (t_1, S_1)\}$$

называется *представляющим* (порождающим) *потоком простой кредитной сделки.*

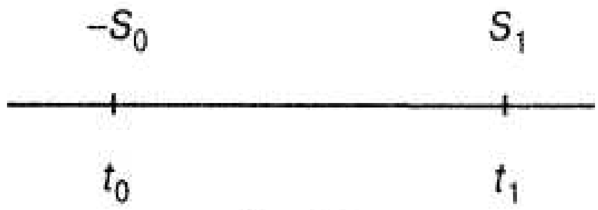

Рис. 2

Естественно, что с точки зрения заемщика знаки сумм в диаграмме следует заменить на противоположные. Выбор того или иного типа диаграммы (или, что то же самое, потока) – дело вкуса. В большинстве случаев он определяется спецификой модели и теми целями, которые преследуются при ее анализе.

Итак, мы определили количественные параметры простейшей кредитной сделки и установили математические зависимости между ними. Это позволяет определить доход, получаемый инвестором в результате сделки. Однако с финансово–экономической точки зрения остался невыясненным вопрос: как оценить *эффективность сделки* или, как говорят, ее *доходность?* Этот вопрос по существу является основным в финансовом анализе кредитной сделки. Если бы всегда можно было в момент заключения сделки предвидеть, какую сумму получим по завершении контракта, то имели бы наиболее простую ситуацию. В этом случае финансовый анализ сделки минимален, а оценка ее доходности происходит постфактум, т. е. после завершения сделки.

Однако совсем другая ситуация складывается, когда требуется оценить доходность некоторой кредитной сделки прежде, чем она будет реально заключена, т. е. осуществить прогноз ее эффективности, сравнивая, например, ее доходность с доходностями иных возможных сделок при разных суммах кредита и сроках их погашения. Для того чтобы осуществить этот прогноз, устанавливаются *«специальные условия сделки»,* предопределяющие тот или иной финансовый закон капитализации и соответствующую финансовую схему, позволяющую находить накопленную сумму долга для разных сроков погашения или определять состояния кредитных сделок в различные моменты времени.

2. Процент, процентная ставка, простые классы кредитных сделок

В этом разделе более подробно изучим важнейшее понятие финансовой математики – *процент,* тесно связанное с кредитными операциями; введем понятие процентной ставки; дадим основные определения доходности простейшей кредитной сделки.

Слово «процент» (от *лат.* pro centum, «на сотню») может иметь два следующих значения.

Первое – математическое: 1 % от некоторого числа S означает сотую долю этого числа, т. е. равен 0,01S. Так, 8% от числа 500 составляют

$$500 \cdot \frac{8}{100} = 500 \cdot 0{,}8 = 40.$$

Второе – экономическое: в финансовой сфере слово «процент» представляет собой плату (в рублях, долларах, марках и т. д.) за использование денежных средств (кредита, ссуды и т. д.), предоставляемых одним лицом (кредитором) другому лицу (заемщику, дебитору, должнику), выраженную в сотых долях от суммы долга. Таким образом, экономическое значение процента более емкое, чем математическое: оно констатирует факт о том, что «за долг надо платить», а также содержит в себе количественную характеристику долга – «сколько требуется платить».

Рассмотрим простой пример. Пусть инвестор кладет в банк на год сумму £ 500 под 8% годовых. Это значит, что в конце года инвестор кроме вложенных денег получит добавочно сумму I, называемую процентами по вкладу, составляющую

$$I = 500 \cdot 0{,}08 = 40(£).$$

Эта сумма представляет собой плату за предоставленные инвестором банку средства, которыми он может распоряжаться в течение года. В данном случае инвестор является кредитором, т. е. лицом, дающим деньги взаймы, а банк – должником, т. е. лицом, берущим эти деньги и обязующимся вернуть их в положенный срок, уплатив по ним проценты.

Итак, по своему определению, процент I, с одной стороны, денежный параметр кредитной сделки, а с другой – служит *абсолютным показателем* ее *доходности.* Однако ясно, что доходность кредитной сделки определяется не только величиной процента, но и тем, какая сумма была вложена для его получения, т. е. суммой кредита P. Поэтому целесообразно иметь другой, так называемый *относительный показатель доходности* кредитной сделки, учитывающий как сам процент I, так и вложенную сумму S, на основе которой он был получен.

Определение 1.1. Величина

$$r = \frac{I}{P} = \frac{S-P}{P} = \frac{S}{P} - 1 \qquad (1.5)$$

или, *учитывая временную привязку* сумм сделки,

$$r = \frac{I}{S_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{S_1}{S_0} - 1 \qquad (1.6)$$

называется *процентной ставкой кредитной сделки за период* $[t_0, t_0 + T]$.

Таким образом, если $I = S_1 - S_0$ показывает абсолютную величину дохода, полученного кредитором на всю сумму долга S_o, то процентная ставка r указывает доход на *единицу суммы кредита* (одного рубля, доллара и т. д.).

Из формул (1.2), (1.5) и (1.6) вытекают следующие важные соотношения:

$$I = Pr = S_0r \tag{1.7}$$

и, кроме того,

$$S_1 = S_0 + I = S_0 + S_0r = S_0(1 + r)\ . \tag{1.8}$$

Следовательно, если известна процентная ставка сделки, то по ее начальной сумме S_o можно найти все остальные финансовые параметры сделки: проценты I и полную (накопленную) сумму долга S_1.

Заметим, что и проценты I, и ставка г являются *интервальными* характеристиками, т. е. соотносятся (непосредственно связаны) с периодом сделки. Чтобы подчеркнуть этот факт, часто пишут I_T и r_T, где T – длина периода $[t_0\ ,t_1]$ сделки в выбранной временной шкале. Будем опускать индекс T, обозначающий период сделки, если из контекста ясно, о каком периоде идет речь.

Замечание. В нашем изложении процентная ставка r, как и другие виды процентных ставок, которые будут вводиться в дальнейшем, имеют двоякий математический смысл: в расчетных формулах они, как правило, понимаются как сотые доли, при этом в их записи не используется символ % (конечный результат после вычисления по формуле может быть равен, например, 0,05 или 0,1 и т. д.), в то же время в тексте процентные ставки имеют уже реальный смысл процента и фактически всегда сопровождаются символом % (например, r = 10%). В тех случаях, когда могут быть отступления от этого правила, соответствующий смысл числового значения процентной ставки необходимо должен следовать из контекста.

Пример 1.1. Пусть в момент времени $t_0 = 0$ выдан кредит на сумму S_0 = £5 000 сроком на $T = 2$ года, по истечении которых кредитор должен получить S_1 = £10 000. Найти процентную ставку сделки.

Решение. Согласно (1.6), процентная ставка r в этой сделке составит

$$r = \frac{10000 - 5000}{5000} = 1,$$

т. е. $r = 100\%$.

Пример 1.2. Рассматривается простая кредитная сделка, состоящая в выдаче £ 2 000 на срок 3 года. Найти сумму погашения долга, если процентная ставка сделки составляет 60%.

Решение. В этом примере (для годовой шкалы)

$$S_0 = £2000,\ t_0 = 0,\ t_1 = 3,\ r = 0{,}6.$$

Согласно (1.8), полная сумма (сумма погашения) долга

$$S_1 = 2000(1 + 0{,}6) = 3200(£).$$

Ставка r, определенная выше, относится ко *всему периоду* сделки. На практике наиболее часто используется другой вид процентной ставки, относящийся к некоторому выбранному *базовому промежутку* времени – в экономике и финансах это обычно год, но в зависимости от конкретных условий может быть выбран любой другой период времени. Выбор базового промежутка позволяет *привести* или, как еще говорят, *нормировать процентную ставку сделки.*

Определение 1.2. Простая нормированная процентная ставка сделки, приведенная к базовому периоду, – это отношение

$$i = \frac{r}{T} \qquad (1.9)$$

где $T = t_1 - t_0$ – срок (длительность, период) сделки, выраженный в единицах базового периода.

С финансово–экономической точки зрения *нормированная процентная ставка представляет собой для кредитора доход с единицы суммы кредита в единицу времени, а для заемщика – стоимость единицы суммы долга в единицу времени.*

Подразумеваемый в определении нормированной процентной ставки базовый период часто выражают в форме соответствующего прилагательного – так говорят о годовой, месячной и других процентных ставках, опуская, если это возможно, слова «простая» и «нормированная».

Пример 1.3. Для сделок из примеров 1.1 и 1.2 найти нормированные ставки этих сделок.

Решение. Для примера 1 ставка г = 1 (т. е. 100%) относится к двухлетнему периоду $T = 2$. Таким образом, простая нормированная ставка сделки

$$i = \frac{1}{2} = 0.5,$$

т. е. 50% годовых.

В примере 1.2 ставка сделки $r = 0,6$ (т. е. 60%) относится к трехлетнему периоду Т= =3. Следовательно, в этом случае

$$i = \frac{0,6}{3} = 0,2,$$

т. е. 20% годовых.

Термин *простая* в определении нормированной ставки употребляется для того, чтобы отличить ее от другого вида нормированных, т. е. приведенных к базовому периоду, ставок – так называемой эффективной сложной процентной ставки.

Подчеркнем, что нормированная ставка, являющаяся еще одной количественной (финансовой) характеристикой сделки, тесно связана со всеми остальными ее характеристиками. Так, несмотря на то что эта ставка приведена к базовому промежутку, она, согласно (1.8), характеризует сделку в рамках ее естественного периода, т. е. промежутка $[t_0, t_1]$. Сам же базовый период может выбираться безотносительно к периоду сделки. Принципы и цели его выбора будут подробно обсуждаться далее. Здесь можно провести лишь некоторую аналогию из механики.

Так, средняя скорость автомобиля, прошедшего 6 км за 10 мин, равна 36 км/ч. В таком представлении скорости базовый временной промежуток 1 ч никак не связан с реальной (естественной) продолжительностью движения 10 мин.

Именно нормированная процентная ставка является определяющим *рыночным фактором* для большинства кредитных сделок, совершаемых в современной экономике. Пока же это просто *одна из числовых характеристик* реальной или условной (планируемой) сделки.

Если нормированная ставка *I* известна, можно выписать ряд очевидных следствий, вытекающих из ее определения:

$$r = iT = i(t_l - t_0); \tag{1.10}$$

$$I = S_o iT, \tag{1.11}$$

$$S_1 = S_0(1 + iT). \tag{1.12}$$

Пример 1.4. Пусть кредит на сумму £2 000 выдан на три года по ставке 10% годовых. Найти проценты и сумму погашения кредита.

Решение. В условии указана годовая, т. е. нормированная, ставка сделки. В годовой шкале исходные параметры сделки имеют следующий вид:

$$t_0 = 0; \quad t_1 = 3; \quad T = 3; \quad S_o = £2\,000, \quad i = 0{,}1.$$

Тогда проценты за три года (срок сделки) составят

$$I = 2\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 3 = 600(£),$$

а сумма погашения

$$S_1 = 2\,000 + 600 = 2\,600(£).$$

Ставка за период относится только к периоду сделки, нормированная же ставка связана с базовым периодом временной шкалы. Изменение базового периода приводит к изменению нормированной процентной ставки. Связь между нормированными простыми процентными ставками для разных базовых периодов очень проста. Если базовый период шкалы T составляет *k* единиц шкалы T′, то имеет место соотношение

$$i' = ki.$$

В частности, например, годовая $i_{год}$ и месячная $i_{мес}$ нормированные ставки связаны очевидным соотношением

$$i_{год} = 12 i_{мес}.$$

Таким образом, к указанным выше трем временным параметрам t_0, T, t_1 и трем финансовым параметрам S_0, S_1, I, характеризующим простейшую кредитную сделку, добавляются еще два финансовых параметра: r – процентная ставка сделки за период $[t_0,\ t_1]$; i – нормированная (простая) процентная ставка сделки, приведенная к базовому периоду временной шкалы.

Из пяти финансовых параметров S_o и S_1 – *величины, относящиеся к моментам времени,* остальные – I, r и I – *интервальные, относящиеся к промежутку времени* – периоду сделки. Эти параметры связаны соотношениями, которые являются либо собственно определениями этих параметров, – формулы (1.5), (1.6) и (1.9), либо их непосредственным следствием – формулы (1.7), (1.8) и (1.10) – (1.12).

В совокупности эти параметры и связывающие их соотношения составляют то, что называют *математической моделью простейшей кредитной сделки.*

Графическая иллюстрация этой модели представлена на временной диаграмме на рис. 3.

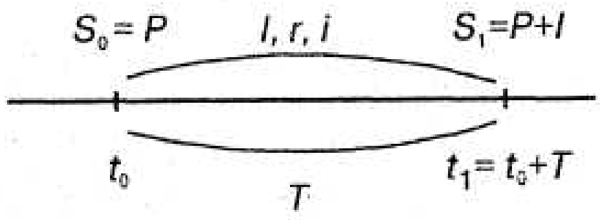

Рис. 3

Заметим, что поскольку здесь речь идет о *модели* простой кредитной сделки, то все временные и финансовые характеристики задаются в модельных шкалах: временной **T** и денежной **M**. Для применения этих моделей в практических случаях необходимо преобразовать исходные данные. Так, в случае выбранной *годовой* (модельной) шкалы T продолжительность периодов в днях необходимо выразить в годовых единицах (в годах). В литературе подробно описаны применяющиеся на практике способы такого преобразования. Заметим, что нет никакого смысла переписывать, как это делается во многих учебниках, теоретические формулы (1.5) – (1.12) в практические. Это лишь усложняет формулы ненужными деталями. Так, формула (1.11) при использовании правила ACT/365 для преобразования продолжительности периода в днях в годовые единицы и выражения для величины / в процентах (%) будет выглядеть как

$$I = S_0 \frac{i(\%)}{100} \frac{D}{365},$$

где D – срок в днях. Появление дополнительных констант 365, 100 лишь затемняет логическую структуру формулы для накопленных за период T процентов. Все, что нужно для применения базовых формул (1.5) – (1.12), – это сделать необходимые преобразования в соответствии с принятыми в конкретной сделке соглашениями.

Пример 1.5. Пусть банк выдал 14.02.10 кредит на сумму £ 600 000 под 10% годовых. Дата погашения кредита – 27.08.11. Найти проценты и сумму погашения кредита, если используется правило ACT/365.

Решение. В соответствии с правилом ACT/365 найдем срок сделки в годах. Поскольку номера начальной ∂_1 и конечной ∂_2 дат сделки

$$N(\partial_1) = 45; \quad N(\partial_2) = 239,$$

то число дней между датами

$$D = (366 – 45) + 239 = 560.$$

Отсюда получаем

$$T = \frac{560}{365} = 1{,}5342 \text{ (год)}$$

и, следовательно, согласно формулам (1.11.) и (1.12), имеем

$$I = 600\,000 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{560}{365} = 95\,054{,}79(£)$$

и

$$S_1 = 600\,000 + 95\,054{,}79 = 695\,054{,}74 \text{ (£)}.$$

На практике срок инвестирования выражается в годах, месяцах, днях и т. д. Возможно также задание этого срока календарными датами первого и последнего дней. В таком случае, для того чтобы воспользоваться формулой простых процентов, следует в качестве срока взять отношение числа дней ссуды к числу дней в году, т. е.

$$T = \frac{D}{Y}.$$

При этом возможно несколько вариантов расчета.

Число дней в году может быть принято равным 360 дням, тогда проценты называются *обычными,* или 365 дням, тогда проценты называются *точными,* т. е.

$$T_{об} = D/360 \quad и \quad T_{точ} = D/365.$$

Очевидно, что при фиксированной годовой процентной ставке обычные проценты больше точных. Кроме того, существуют два способа вычисления числа дней для срока инвестирования. Наиболее распространен подсчет точного числа дней указанного срока, исключая первый или последний день.

Пример 1.6. Найти точное число дней между 5 марта и 29 сентября (год не високосный).

Решение. Пользуясь таблицей определения порядкового номера дня в году, находим, что 28 сентября – 271-й, а 5 марта – 64-й дни года. Тогда число дней между этими датами 271 – 64 = 207.

При другом подходе подсчитывается *приближенное* число дней исходя из полного числа месяцев в сроке и числа дней (остатка) неполного месяца. При этом каждый месяц считается равным 30 дням.

Пример 1.7. Найти приближенное число дней между 5 марта и 28 сентября.

Решение. Поскольку между этими датами укладывается 6 мес. (от 5 марта до 5 сентября) и остается еще 23 дня (от 5 сентября до 28 сентября), то число дней между этими датами равно 6*30 + 23 = 203.

Итак, учитывая точные и обычные проценты, а также точное и приближенное число дней для срока инвестирования, получим четыре метода вычисления простых процентов:

1. Обычные проценты с точным числом дней (ACT/360 – банковское правило).

2. Точные проценты с точным числом дней (ACT/365).

3. Обычные проценты с приближенным числом дней (30/360).

4. Точные проценты с приближенным числом дней (на практике не используются).

Наиболее часто применяется первый метод, называемый *банковским правилом,* реже – второй и третий и почти никогда – четвертый.

Временные параметры и величину кредита $S_o = P$ относят к *исходным,* или *первичным,* параметрам кредитной сделки. При установлении конкретных значений первичных параметров превалирующая роль отдается кредитору. Так, величина кредита определяется наличием у кредитора свободных денежных средств, а срок – промежутком времени, пока эти средства являются свободными, т. е. не будут использованы кредитором. Значения этих параметров во многих случаях могут устанавливаться кредитором произвольно. Например, вкладчик сам решает, какую сумму и на какой срок он хотел бы вложить в банк.

Остальные финансовые параметры относятся к *вторичным,* или *производным,* параметрам сделки. С одной стороны, они могут зависеть от первичных параметров – так, проценты по вкладу, естественно, тем больше, чем больше величина вклада и его срок. С другой стороны, они определяются не только первичными параметрами, но и другими факторами. В частности, различные банки привлекают вклады под различные процентные ставки, так что, например, на трехмесячный вклад в £10 000 в разных банках будут начислены разные проценты.

Считая первичные параметры заданными, легко установить, что каждый из четырех вторичных параметров определяет три остальных.

Таким образом, для полного описания кредитной сделки, по крайней мере, один из вторичных параметров должен быть явно указан. В приведенных выше формальных определениях задавалась сумма процентов I (или конечная сумма долга), через которую выражались все остальные параметры. Такой подход естествен при анализе *завершенных* (реализованных) сделок, в которых все денежные суммы фиксируются в бухгалтерских записях. Тогда, например, зная начальную и конечную суммы долга, можно найти сумму процентов и процентную ставку (общую и нормированную). Вычисленная таким образом ставка называется *реализованной.* Кредитор в этом случае действительно реализовал такую доходность, проведя сделку.

Хотя каждая сделка в случае ее удачного завершения становится реализованной, прежде чем осуществиться, она была *планируемой.* Планируемые (ожидаемые) сделки играют, пожалуй, основную роль в применении математических методов в финансовой практике. У кредитора и должника появляется возможность выбора между различными вариантами. И как раз здесь, на этапе предварительного анализа, роль математической модели представляется особенно важной, поскольку позволяет оценить эффективность различных вариантов сделки и выбрать оптимальный. В такой ситуации большую и даже, можно сказать, определяющую роль играет *нормированная процентная ставка.* Именно она, вместе с первичными параметрами, не только позволяет получить полное представление о сделке, но и дает возможность построения *корректных математических моделей* для анализа кредитных сделок.

Почему же именно нормированная процентная ставка является определяющим вторичным параметром кредитных сделок при их описании? Ниже мы попытаемся дать достаточно полный ответ на этот вопрос. Однако для этого потребуется более глубокий экономический анализ кредитных операций.

В этой связи прежде всего остановимся на одном важном свойстве кредитных сделок – их *множественности.*

Единичная (индивидуальная) завершенная или потенциальная сделка с формальной точки зрения есть просто набор из 8 чисел, связанных уравнениями (1.5)–(1.12). Хотя единичная сделка может представлять интерес для бухгалтера, ревизора или компетентных органов, она вряд ли может служить объектом содержательной математической модели, так как из–за одной сделки, вообще говоря, нет смысла «городить огород». Построение математической модели финансовых операций осмысленно лишь в случае, когда они имеют массовый характер и при этом обладают определенными близкими или схожими признаками. Для кредитных сделок оба эти фактора имеют место.

В самом деле, кредитная сделка едва ли не самый распространенный вид финансовой операции. Вкладчик, помещая деньги в банк на определенный срок, становится кредитором банка, а банк – должником. Банк, в свою очередь, передает привлеченные от вкладчиков средства промышленным предприятиям, фирмам, другим банкам, а также физическим лицам в качестве кредита. Таким образом, банки и другие кредитные учреждения являются посредниками на одном из самых значительных секторов финансового рынка – *кредитном рынке.*

Основной вид товара, обращающийся на этом рынке, – *кредитные ресурсы,* представляющие собой временно свободные денежные средства частных лиц, предприятий, государства и др.

Главные участники этого рынка – юридические и физические лица, обладающие избытком (свободных) денежных средств, и юридические и физические лица, испытывающие недостаток средств. Первые создают *предложение,* а вторые – *спрос* на кредитном рынке. Структура предложения, т. е. величина свободных средств и сроки, на которые они могут быть предоставлены, значительно варьируется у различных кредиторов. Весьма разнообразна и структура спроса, т. е. величина требуемых заемщиками средств и сроки, на которые эти средства им необходимы.

Соответствие между спросом и предложением за счет установления прямого контакта с заключением договора между кредитором и заемщиком возможно, если объемы и сроки предлагаемых и требуемых средств совпадают, а также доход кредитора (т. е. проценты) является приемлемой ценой для заемщика. Такое бывает достаточно редко, поэтому так важна роль банков как основных посредников кредитного рынка, которые, привлекая свободные средства кредиторов в виде вкладов (различной величины и срочности), формируют совокупный пул денежных средств – *пассивы банка* и передают их в виде кредитов (также различной величины и срочности) своим заемщикам, формируя *активы банка.*

Аккумулирование привлеченных банком средств позволяет преодолеть упомянутое выше несовпадение структуры спроса и предложения на кредитном рынке. Банки, связывая основных агентов кредитного рынка, получают прибыль благодаря тому, что платят в целом вкладчикам меньше, чем взимают с заемщиков. Конкурируя друг с другом, они стремятся привлечь, с одной стороны, как можно большее число вкладчиков, поощряя вложение ими как можно больших средств на возможно большие сроки, причем стремясь заплатить за это как можно меньше. С другой стороны, банки хотят выдать как можно больше кредитов, стремясь ради уменьшения риска уменьшить их размер и сроки на одного заемщика, требуя при этом как можно большие проценты за предоставленные кредиты.

Будучи товаром, кредитные ресурсы имеют свою цену. Обычно, говоря о цене товара, подразумевают цену некоторой *единицы товара,* которая может исчисляться в штуках, килограммах, метрах и т. д. В тех случаях, когда в потреблении товара играет роль время, например аренда, поставка электроэнергии, труд и т. д., в единице товара оно может явно учитываться – так, говорят о киловатт-часах, месячной заработной плате и т. д. Как уже упоминалось, первичными характеристиками кредита являются его (основная) сумма и срок, на который он выдается. Поэтому роль *единицы кредитных ресурсов* играет *денежная единица за единицу времени.* Тогда для нормированной процентной ставки

$$i = \frac{I}{PT}$$

при $P = 1$ и $T = 1$ имеем $i = I$.

Таким образом, *нормированная процентная ставка i* представляет собой *стоимость единицы кредитных ресурсов в единицу времени* (для заданной денежной и временной шкалы). Например, 15%-ная годовая ставка по валютному вкладу означает, что за каждый привлеченный на один год доллар банк должен заплатить вкладчику 15 центов.

Как известно, равновесная цена товара на рынке складывается в результате взаимодействия спроса и предложения. Механизм такого взаимодействия поддерживается, с одной стороны, конкуренцией между продавцами (кредиторами), а с другой – конкуренцией между покупателями (должниками).

Конкуренция банков и их клиентов (вкладчиков и заемщиков), создавая активный и динамичный рынок, устанавливает равновесную цену для привлеченных средств – *ставку по депозитам,* или *ставку привлечения,* и предлагаемых средств – *ставку по кредитам,* или *ставку размещения.* Например, для банка ставка привлечения $i_{\text{прив}}$ означает стоимость привлекаемых ресурсов, тогда как ставка размещения $i_{\text{разм}}$ – доходность или эффективность их использования. Естественно, что для успешной работы и получения прибыли доходы должны превосходить расходы, т. е. ставка размещения должна быть выше ставки привлечения.

Как показывает практика, по крайней мере для краткосрочных кредитных сделок (сроком до года), осуществляемых на рынке, именно *простые нормированные годовые ставки* обладают *определенной устойчивостью,* т. е. в условиях стабильного рынка они приближаются к некоторым «равновесным» (или средним) значениям, допуская в каждом конкретном случае лишь незначительные колебания вокруг этих значений. И чем ближе временные и финансовые и другие характеристики сделок, тем меньше это колебание относительно средних ставок для этой группы сделок. Например, конкретный банк привлекает депозиты на близкие сроки и близкие суммы по одной годовой ставке.

Заметим, что наличие равновесной цены – процентной ставки – есть *эмпирический,* а не умозрительный факт. Именно он позволяет говорить об определяющей роли нормированной процентной ставки при построении математической модели кредитных сделок.

Таким образом, из всего разнообразия простейших кредитных сделок можно выделить некоторые группы сделок, близкие между собой по финансовым и временным характеристикам, и строить математические модели уже для таких групп.

Для формализации сказанного назовем две кредитные сделки *просто эквивалентными,* если их нормированные (простые) процентные ставки совпадают. Определив понятие простой эквивалентности, разобьем реальные (осуществленные) и потенциальные (планируемые) сделки на *группы,* или *классы, эквивалентности.* Тогда класс попарно просто эквивалентных кредитных сделок логично назвать *простым классом.*

Таким образом, все сделки простого класса имеют одну и ту же нормированную ставку и, следовательно, удовлетворяют равенствам (1.10) – (1.12). Общую для всего класса нормированную процентную ставку назовем *ставкой класса,* или *определяющей ставкой.*

Заметим, что, в отличие от первоначального определения нормированной ставки, которая была привязана к сделке, определяющая ставка уже относится (привязана) не к одной сделке, а к целому классу сделок. В этом смысле она становится для отдельной сделки *внешним, независимым,* параметром.

Итак, мы выделили и формализовали объект математической модели – простые классы сделок. Выше мы уже фактически показали, откуда в реальной финансовой практике берутся простые классы сделок. Обратимся еще раз к этой проблеме и проанализируем ее уже с новых позиций.

Напомним о массовости кредитных сделок в современной экономике. Рассмотрим по–прежнему в качестве показательного примера работу банков, осуществляющих тысячи и десятки тысяч депозитных и кредитных сделок в год.

Для депозитных сделок величина вклада и срок сделки определяются вкладчиком банка, тогда как банк устанавливает депозитную нормированную ставку, например годовую. В этом случае все вклады, суммы и сроки которых лежат в пределах определяемого руководством банка диапазона, принимаются под фиксированную процентную ставку, т. е. все сделки такого вида эквивалентны и составляют один простой класс.

Аналогичная картина складывается и для выдаваемых банком кредитов с той лишь разницей, что в этом случае подход более индивидуальный, поскольку, кроме величины и сроков кредита, необходимо учитывать кредитоспособность и надежность заемщика. Для кредитов с разной степенью риска, даже при одинаковых сумме и сроке, банк использует различные ставки, требуя от более рискованных заемщиков более высокую плату, т. е. более высокую нормированную ставку по кредиту. В этом случае более индивидуализированный подход определяется существенными различиями кредитоспособности заемщиков.

В тех случаях, когда условия более стандартизованы, фиксация процентных ставок является общепринятым приемом. Примером этого может служить межбанковский рынок сверхкраткосрочных (от одного дня до недели) кредитов, когда банки–дилеры, активно работающие на этом рынке, объявляют (фиксируют) две ставки: ставку привлечения и ставку размещения.

Конечно, со временем ставки даже по сделкам с совпадающими базовыми характеристиками (величиной и сроками) могут меняться, поскольку срок и предложение на кредитном рынке зависят от конкретных экономических условий.

Суть изложенного состоит в том, что в реальной практике на определенных сегментах кредитного рынка, прежде всего краткосрочного, называемого также *денежным рынком,* осуществляется достаточно большое число постоянно возобновляемых простых классов кредитных сделок. Часто конкретный сегмент (сектор) кредитного рынка можно трактовать как отдельный простой класс. В этом случае определяющая процентная ставка класса называется *процентной ставкой* данного *сегмента (сектора)* кредитного рынка. Так, можно говорить, например, о ставке межбанковских кредитов и т. п.

В финансовой литературе часто говорят о процентных ставках вообще, т. е. для рынка в целом. Это не всегда корректно. Как правило, имеется в виду либо некоторый сегмент рынка, либо некоторая усредненная характеристика рынка в целом, например средневзвешенная (по объемам) процентная ставка, полученная по ставкам отдельных секторов финансового рынка. К интерпретации термина «процентная ставка» следует относиться с осторожностью, всегда, по возможности, проясняя контекст, в котором он используется.

3. Дисконт, учетная ставка, простые дисконтные классы кредитных сделок

Вернемся к простой кредитной сделке. Начальная сумма долга (сумма выданного кредита) P – первичный параметр. Она играет роль базы для вычисления остальных параметров. Так, в формуле для процентной ставки

$$r = \frac{I}{P}$$

проценты за кредит соотносятся с основной суммой долга *P,* получаемой должником в *начале* сделки, т. е. $P = S_o$. Оценивая таким образом доходность сделки, кредитор соотносит полученный доход (прибыль) с инвестируемым капиталом. С другой стороны, формулы

$$I = Pr = S_o\, r \;\text{ и }\; S_1 = S_o(1+r)$$

выражают тот факт, что проценты начисляются на исходную сумму S_o и по отношению к этой сумме полная сумма $S = S_1$ в момент времени $t_1 = t_0 + T$ является увеличенной (наращенной), а проценты I дают величину прироста.

Однако кредитную сделку можно описать, взяв в качестве исходного (базового) параметра полную (конечную) сумму долга $S = S_1$.

О целесообразности и практическом применении этого подхода будет сказано чуть ниже, сейчас же этот подход будет рассмотрен с формальной точки зрения.

Определение 1.3. Учетной ставкой сделки называется величина

$$W = \frac{S-P}{S}. \tag{1.13}$$

Таким образом, в отличие от определения процентной ставки, в определении учетной ставки сумма процентов соотносится не с начальной, а с *конечной, полной* суммой долга.

Заметим, что $I = I_T$ – интервальная величина, относящаяся к периоду времени Т, и нет какого–либо естественного (математик сказал бы канонического) правила ее соотнесения к одной из сумм S_o и S_1. Раньше в качестве базы соотнесения мы брали S_o, а теперь S_1. С произволом такого рода, связанного *с разнотипностью* (мгновенной и интервальной) рассматриваемых величин, неоднократно столкнемся в дальнейшем.

Чтобы подчеркнуть тот факт, что именно конечная сумма долга является отправной, процент I в этом случае получил другое название. А именно разность

$$D = S_1 - S_0$$

называется также *дисконтом* сделки (по отношению к конечной сумме S_1).

Конечно, численно проценты и дисконт сделки совпадают, различие заключается в выборе отправной точки и направлении движения. Если исходным значением служит начальная сумма долга S_0, то переход от нее к S_1 означает увеличение суммы, а проценты, как уже отмечалось, – прирост. С позиции конечной суммы долга S_1 переход к S_o означает уменьшение суммы, а дисконт дает величину этого уменьшения или *скидку*.

Обращаясь снова к понятию финансовых событий, отметим, что в данном случае событие (t_1, S_1) – платеж полной суммы долга S_l в момент времени t_1 – замещается событием (t_0, S_o) – платежом S_o в момент времени t_O.

Содержательный смысл такого перехода очень прост. Найти величину S_0 для заданного события (t_1, S_1) означает ответить на вопрос: какую сумму должен выдать кредитор в момент времени t_O, чтобы взамен получить в момент времени t_1 сумму S_1? Естественно, что при этом процентная (или учетная) ставка кредита считается заданной. Величина S_0, понимаемая в этом контексте, называется *текущей* (сегодняшней, настоящей) стоимостью (или *текущим значением*) *суммы* S_1 (точнее, события (t_1, S_1)). Этот факт записывается в виде

$$S_0 = PV_{t_0}(S_1). \tag{1.14}$$

На самом деле в (1.14) речь идет не о суммах, а о событиях. Более корректна запись

$$(t_0, S_0) = PV_{t_0} \cdot (t_1, S_1). \tag{1.15}$$

Тем не менее в дальнейшем все же будем пользоваться общепринятой сокращенной записью (2.14).

Оператор PV_{t_0} перехода от будущего события (t_1, S_1) к текущему (настоящему) событию (t_0, S_0) называется *оператором дисконтирования.* Поэтому сумму S_0 называют также *дисконтированным значением* суммы S.

Вернемся вновь к формуле (1.13) и выпишем следующие равенства, немедленно вытекающие из нее:

$$I = D = wS_1 \tag{1.16}$$

$$S_0 = S_1(1 - w) \tag{1.16}$$

$$r = \frac{I}{S_0} = \frac{w}{1-w}. \tag{1.18}$$

Учетная ставка w сделки относится *ко всему периоду* (сроку) сделки и точно так же, как процентная ставка, может быть нормирована, т. е. приведена к базовому периоду.

Определение 1.4. Нормированной простой учетной ставкой сделки, приведенной к базовому периоду, называется величина

$$d = \frac{w}{T}, \tag{1.19}$$

где $T = t_1 - t_0$ – срок сделки в единицах базового периода.

Так же как и для процентной ставки, базовый период, участвующий в вычислении нормированной учетной ставки, будет присутствовать в качестве соответствующего прилагательного. При этом слова «простая» и «нормированная», как правило, опускаются (например, годовая учетная ставка, месячная учетная ставка).

Зная нормированную ставку и основную или полную сумму долга, легко найти все остальные параметры сделки:

$$\mathrm{w} = \mathrm{dT} \tag{1.20}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{D} = \mathrm{S_1 dT} \tag{1.21}$$

$$\mathrm{S_0} = \mathrm{S_1(1 - dT)} \tag{1.22}$$

$$S_1 = \frac{S_0}{1-dT} \tag{1.23}$$

$$r = \frac{dT}{1-dT} \tag{1.24}$$

$$i = \frac{d}{1-dT} \tag{1.25}$$

Естественно, что учетная и нормированная учетная ставки могут быть выражены через процентную и нормированную процентную ставки сделки. Так, имеют место равенства

$$w = \frac{r}{1+r} = \frac{iT}{1+iT}, \qquad (1.26)$$

$$d = \frac{i}{1+iT}. \qquad (1.27)$$

К формулам (1.24), (1.25) и двойственным им формулам (1.26), (1.27) необходимо подходить с осторожностью. Следует помнить, что нормированные ставки *i, d* и срок T должны быть согласованы, т. е. срок должен обязательно выражаться в единицах базового периода, к которому приводятся процентная и учетная ставки сделки.

Не менее существенно и то, что формулы (1.25) и (1.27) для нормированных процентной и учетной ставок *зависят от срока* сделки. Именно поэтому в приведенный выше список не включены часто приводимые в учебниках по финансовой математике «сбивающие с толку» формулы

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}}{1-\mathrm{d}},$$

$$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},$$

которые получаются из (1.25) и (1.27) при $T = 1$. Эти формулы верны *только для сделок с единичным сроком.* Изменение срока меняет процентную ставку при неизменной учетной ставке и учетную ставку при неизменной процентной.

Пример 1.8. Пусть кредит выдан на 6 мес. под 10% годовых. Найти учетные ставки за период сделки и нормированные – месячную и годовую.

Решение. По условию $i_{\text{год}} = 0{,}1$. Тогда по формуле (1.26), учитывая, что $T = 1/2$ года, имеем

$$w = \frac{0,1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,1 \cdot \frac{1}{2}} = 0,0476,$$

или 4,76%.

Годовую учетную ставку можно найти либо по определению:

$$d_{\text{год}} = \mathrm{w/T} = 0,0476/0,5 = 0,0952,$$

т. е. 9,52%, либо по формуле (1.27), т. е. те же 9,52%.

Месячная учетная ставка

$$\mathrm{d}_{\text{мес}} = \mathrm{w/T} = 0,0476/6 = 0,0079,$$

или 0,79%. Здесь $T = 6$, так как базовый период – месяц и срок – должен быть выражен в месяцах. Заметим, что для использования формулы (1.27) необходимо было бы в качестве i рассматривать месячную процентную ставку

$$\mathrm{i}_{\text{мес}} = \mathrm{i}_{\text{год}}/12 = 0,1/12.$$

Тогда $$d_{\text{мес}} = 0,0079.$$

Таким образом, описание сделки с помощью процентной ставки полностью симметрично ее описанию исходя из учетной ставки. Различие между ними состоит в выборе точки отсчета или, точнее говоря, базового финансового события. В процентной схеме таким является начальное (t_0, S_0), а в учетной – конечное (t_1, S_1) события.

Введенное несколько формально понятие учетной ставки имеет естественную интерпретацию. Она основана на *временном сдвиге* момента выплаты процентов. Рассмотрим эту интерпретацию подробнее.

В исходном описании простой кредитной сделки предполагалось, что в начальный момент времени t_O сделки должник получает в кредит основную сумму долга $P = S_0$, а в конце t_1 периода сделки возвращает эту сумму и выплачивает проценты $I = I_{\text{т}}$ за период сделки. Таким образом, ключевым здесь является тот факт, что проценты выплачиваются в *конце* периода сделки. Однако проценты являются с финансово–экономической точки зрения не фондовой, т. е. относящейся к моменту времени, а интервальной характеристикой, т. е. величиной, относящейся к некоторому промежутку времени.

Актуализация такой величины в виде конкретного платежа зависит от конкретных условий финансовой сделки. Таким образом, проценты могли быть выплачены не только в конце срока, а в начале, конце, середине периода или даже в виде серии платежей. Последний случай более подробно рассмотрен в специальной литературе, посвященной обобщенным кредитным сделкам. Здесь же отметим лишь авансированную схему, т. е. схему, при которой проценты выплачиваются авансом *в начале* срока. В специальной литературе проценты, выплачиваемые в конце срока, называются *декурсивными, постнумерандо* или процентами *на сто,* а проценты, выплачиваемые в начале срока, – *антисипативными, пренумерандо* или процентами *со ста.* Мы будем использовать термин «авансированные проценты», как более простой и указывающий на суть дела.

Рассмотрим подробнее сделку с авансированной выплатой процентов. В этом случае должник берет (в момент t_0) в долг сумму P – сумму кредита. Однако проценты теперь должны быть выплачены немедленно. Пусть сумма процентов в такой сделке равна I. Это значит, что на самом деле должник реально получает не сумму P, а меньшую сумму

$$S_0 = P - I \, .$$

Следовательно, по отношению к сумме кредита P выданная сумма S_0 меньше ее на величину I, так что реально I есть не что иное, как дисконт D, т. е. скидка с (основной) суммы долга P, которая в этом случае становится возвращаемой суммой S_1 долга. Представляющий поток сделки в этом случае будет иметь вид

$$CF = \{(t_0, -P+I),(t_1, P)\}.$$

Если теперь от абсолютных (денежных) характеристик (сумм) сделки перейти к относительным (ставкам), то, определяя ставку сделки как отношение авансом выплаченных процентов I

к сумме кредита, т. е. как величину *I/P,* получим, что эта характеристика есть в точности учетная ставка *w* за период сделки.

Так, если сумма годового кредита P = £ 100 000, а стоимость кредита 10% годовых, выплачиваемых *авансом,* то должник должен немедленно выплатить из суммы кредита проценты

$$I = 0,1 * 100\,000 = 10\,000£,$$

так что реально на руки он получает лишь сумму

$$S_o = 100\,000 - 10\,000 = 90\,000(£).$$

Вернуть же в конце года он, естественно, должен взятую в долг сумму

$$S_1 = P = 100\,000(£).$$

Нормируя авансированную ставку w, получим нормированную учетную ставку сделки.

В приведенной интерпретации совершенно естественным выглядит тот факт, что ставка за кредит вычисляется как отношение величины выплачиваемых процентов I к *основной сумме долга* P. В обычной схеме, т. е. с выплатой процентов в конце срока, основная сумма долга P полностью выдается *в начале срока, т. е.* $P = S_0$, и поэтому ставка за период интерпретируется как *процентная ставка.* В случае же авансированных процентов в начальный момент времени выплачивается меньшая (дисконтированная) сумма S_0, тогда как основная сумма долга P теперь выплачивается в конце срока, т. е. $P = S_1$ и ставка сделки *естественным образом* будет интерпретироваться как учетная ставка. Заметим, что в конечном счете с формальной точки зрения мы имеем лишь две реально выплачиваемые суммы (т. е. два фактических события): сумму S_o – выданного кредита и S_1 – сумму его погашения. Доход, с точки зрения кредитора, или расход, с точки зрения должника, есть разность $S_1 - S_0$. Когда считать эту сумму выплаченной и к какой базе (т. е. к S_o или S_1) ее относить, вообще говоря, дело вкуса. Реально для сделки обе ставки, как процентную, так и учетную, легко найти одновременно. Это лишь взаимно дополнительные, относительные (в отличие от абсолютных, денежных) характеристики сделки. Однако на практике имеется естественным образом возникающая *асимметрия,* обусловленная конкретным видом сделки.

Кредитные сделки обычно воплощаются в виде сделок со специальными финансовыми инструментами – ценными бумагами. Одной из характеристик этих ценных бумаг является их номинал F, по смыслу совпадающий с основной суммой долга. При этом в так называемых *процентных* бумагах этот номинал играет роль выданной суммы кредита, т. е. S_0, тогда как в *дисконтных* бумагах он играет роль суммы погашения S_1. Поэтому в сделках с дисконтными бумагами учетная ставка появляется столь же естественно, как процентная ставка в процентных бумагах или в банковских депозитах.

4. Краткосрочные долговые обязательства

В этом параграфе более подробно рассмотрим описание кредитных сделок с некоторыми простейшими финансовыми инструментами – краткосрочными долговыми обязательствами. Краткосрочные долговые обязательства – один из распространенных видов ценных бумаг, обращающихся на так называемом *денежном рынке* (money market). Денежный рынок – рынок краткосрочных ценных бумаг со сроком обращения не больше года. Наиболее типичными представителями таких ценных бумаг являются депозитные сертификаты и векселя.

До сих пор наши определения процентных и учетных ставок (за период и нормированных) были привязаны к отдельным сделкам. Это ставки именно сделок, а не класса. Для отдельных сделок процентная или учетная ставка (за период и нормированная) – просто еще один параметр. Выше отмечена важная роль процентной ставки как регулятора кредитного рынка. Эта роль связана с массовостью кредитных сделок. Существуют ли на практике классы сделок, в которых определяющей является учетная ставка? Оказывается, такой класс сделок действительно существует. Он тесно связан с наличием, во-первых, специальных *дисконтных долговых инструментов* и, во-вторых, с операцией *учета векселей.* В этом параграфе мы кратко коснемся роли процентной и учетной ставок для *обращающихся долговых обязательств* – одного из видов финансовых инструментов.

Кредитная сделка может быть реализована в виде прямого *кредитного договора* (контракта) между двумя сторонами (кредитором и заемщиком). Такой контракт на все время своего действия неразрывно связан с заключившими его сторонами и является, вообще говоря, *необращающимся долговым обязательством.* Получение предприятием кредита в банке, оформление *депозитного договора* между вкладчиком и банком – примеры таких контрактов. Однако во многих случаях кредитная сделка осуществляется посредством *эмиссии* (выпуска) и *продажи обращающихся долговых обязательств.* В отличие от прямого контракта, эти обязательства представляют собой ценные бумаги, которые относительно легко могут менять своих владельцев. Если это *именная ценная бумага,* т. е. ее владелец в каждый момент явно указан (в самой бумаге), то обращение осуществляется с помощью определенного механизма передачи прав. Если это *ценная бумага на предъявителя,* то обращение ее на рынке осуществляется свободной куплей/продажей.

Когда кредитная сделка представлена долговым обязательством – ценной бумагой, то основные параметры сделки содержатся в ней в качестве *обязательных реквизитов.* Так, начало сделки отмечается *датой эмиссии,* конец – *датой погашения.* Финансовые параметры устанавливаются специфическим для каждого вида долгового обязательства образом.

В так называемых дисконтных ценных бумагах обычно фиксируется полная сумма (сумма погашения) долга. При погашении обязательства его владелец получает от эмитента указанную сумму. Доход владельца обязательства (инвестора) образуется за счет того, что покупка обязательства осуществляется по цене ниже суммы погашения, т. е. в процессе обращения дисконтная ценная бумага продается с дисконтом (скидкой). Фиксированная полная (возвращаемая) сумма долга – основной финансовый параметр дисконтных ценных бумаг, часто называемый *номиналом.*

Наиболее распространенным примером дисконтных ценных бумаг являются *векселя.* Нормативные (юридические) характеристики векселя и условия его обращения регламентируются специальным законодательством. Имеются различные типы векселей, например простые и переводные. Отвлекаясь от специфических особенностей различных видов, в рамках *математической модели* можно описать вексель его реквизитами (обязательными параметрами). Вексель характеризуется: а) номиналом F (Face Value); б) датой эмиссии t_0; в) датой погашения t_1 или сроком обращения T_o.

В этом описании векселя никаких процентных ставок не указывается. В некоторых разновидностях векселей задание ставки подразумевается. Однако в классическом случае это чисто дисконтный инструмент, содержащий всего один финансовый параметр – номинал F, который всегда является суммой погашения. Другими словами, именно эту сумму в день погашения t_1 получит владелец векселя, купивший его по некоторой (естественно меньшей, чем номинал) цене P, либо в день эмиссии, либо в некоторый другой день до даты погашения.

В финансовой практике многих стран широко распространен еще один вид дисконтных ценных бумаг, весьма похожих на векселя, эмитент которых – правительство (обычно министерство финансов или казначейство). В США эти краткосрочные дисконтные бумаги так и называются Казначейскими векселями (Treasure Bills). В нашей стране они известны под названием ГКО (государственные краткосрочные облигации). Их эмитентом является Министерство финансов РФ. Номинал ГКО составляет £1000. По этой цене облигация погашается. Инвесторы покупают ГКО на финансовом рынке (точнее, на рынке ГКО) по цене, меньшей номинала. На рынке цена ГКО задается в виде *курса* (или *котировки*) на данный момент времени (*текущий курс*), который выражается в процентах от номинальной стоимости облигации. Так, курс 75 означает, что цена (в рублях) составляет £750. В терминах котировок учетная ставка (в %) представляет собой просто разность между номиналом (100) и текущим курсом (Q).

В *процентных бумагах* обычно фиксируются *основная сумма долга* и *процентная ставка* (купонная). К такому виду долговых обязательств относятся, например, *депозитные сертификаты,* эмитируемые банком. Основная сумма долга в депозитном сертификате фиксируется в виде *номинала,* т. е. номинальной стоимости этой бумаги. В момент эмиссии депозитный сертификат обычно продается инвестору (кредитору) по номинальной стоимости. При его погашении банк выкупает сертификат у владельца (инвестора) по цене выше номинала. Цена погашения больше номинала на сумму начисленных процентов за *полный* срок обращения сертификата.

Выпишем основные финансовые и временные параметры (реквизиты), связанные с денежным сертификатом:

F – номинал;

t_0 – момент (дата) эмиссии;

t_1 – момент (дата) погашения;

$T_o = T_{обр} = (t_1 - t_0)$ – период обращения;

c – купонная (нормированная процентная) ставка.

Введенные параметры – модельные. Так, все временные параметры должны указываться в некоторой выбранной временной (например, годовой) шкале. На практике моменту t_0 соответствует *дата эмиссии;* моменту t_1 – *дата погашения.* Срок обращения T_o задается в *днях* – D_o. Поэтому для получения значений временных параметров в модели необходимо предварительно выполнить преобразование календарных (практических) данных в модельные (теоретические) по одному из временных правил. Такое преобразование осуществляется обычно по формуле

$$T_0 = \frac{D_0}{Y}, \tag{1.28}$$

где D_0 – срок сделки в днях; Y– годовой дивизор.

С долговыми обязательствами любого вида (векселем или сертификатом) естественным образом связана так называемая *стандартная кредитная* сделка, заключающаяся в том, что инвестор приобретает обязательство в момент эмиссии и держит его до погашения. В этом случае реквизиты долгового обязательства будут играть роль основных параметров сделки. Началом сделки ($t_о$) служит момент эмиссии, концом (t_1) – момент погашения обязательства. Для процентных бумаг в этом случае номинал (F) задает начальную стоимость (S_0), а для дисконтных – конечную стоимость (S_1) долга. Если в процентной бумаге фиксируется процентная ставка, то конечная сумма долга вычисляется по ней и номиналу. Если же некоторый параметр не указан в виде реквизита, то он определяется внешними (рыночными или договорными) условиями.

Естественность подобных сделок вовсе не означает их наибольшую распространенность. На практике обращающиеся ценные бумаги редко имеют постоянного владельца в течение всей своей «жизни», они покупаются и перепродаются многократно. Так, владелец векселя, нуждающийся в наличных средствах, может учесть вексель в банке. Учет банком векселя означает покупку банком векселя у его владельца. Цена такой сделки или учетная (выкупная) цена векселя, естественно, ниже его номинала, т. е. вексель учитывается с дисконтом. Процент, который составляет дисконт (скидка) по отношению к номиналу, есть, очевидно, не что иное, как *учетная ставка* сделки. Само название этой ставки происходит от названия сделки. Таким образом, с одной и той же ценной бумагой на протяжении ее жизни осуществляется множество сделок, связь параметров которых с реквизитами самой ценной бумаги далеко не очевидна, хотя последние во многом определяют эти параметры.

Тем не менее анализ «естественной» (канонической) сделки полезен даже в тех случаях, когда инвестор, приобретая ценную бумагу, не намеревается держать ее до погашения. Такой анализ может служить эталоном для сравнения с другими сделками сданной ценной бумагой, например ее продажей до срока погашения.

Рассмотрим примеры простейших расчетов, связанных с депозитными сертификатами и векселями. Начнем с депозитных сертификатов.

Для депозитного сертификата купонная ставка c есть не что иное, как процентная ставка *стандартной сделки* с сертификатом, т. е. простой кредитной сделки, в которой кредитор *покупает* в момент t_O сертификат у эмитента по номиналу F и в конце срока t_1 погашает (возвращает, продает) сертификат у эмитента, получая от него *сумму погашения* $S = S_{\text{пог}}$. Эти условия однозначно определяют сумму погашения через основные реквизиты сертификата:

$$S = F(1 + cT_0). \qquad (1.29)$$

В этой сделке, как отмечалось, начальный покупатель сертификата является кредитором, а эмитент сертификата – должником, поскольку покупка сертификата по номиналу F означает передачу суммы F эмитенту, который по окончании срока обращения T_o обязан вернуть эту сумму вместе с процентами по ставке *c*, т. е. выплатить сумму погашения.

Пример 1.9. Пусть инвестор покупает (по номиналу) депозитный сертификат с номиналом £ 1000, купонной ставкой 20% годовых и сроком обращения 270 дней. Найти сумму погашения сертификата. Использовать правило ACT/365.

Р е ш е н и е. В этом примере $F = £1\,000$; $c = 0{,}2$ и

$$T_0 = \frac{270}{365} = 0{,}7397.$$

Следовательно, согласно формуле (1.29),

$$S = 1147{,}94(£).$$

Отметим, что реквизиты сертификата, как и определяемая ими сумма погашения, не изменяются в течение его периода обращения. Однако *оставшийся срок* до погашения, в отличие от периода обращения T_o, безусловно, меняется с течением времени. Так, если сертификат был выпущен в момент $t_O = 0$ на срок T_o, то в некоторый более поздний момент времени оставшийся срок до погашения есть

$$T = T_0 - t. \tag{1.30}$$

Как уже говорилось, на равновесном рынке нормированные процентные ставки по различным сделкам близки к общему (одному и тому же) уровню. В частности, будут равны нормированные ставки сделок с различными долговыми инструментами, поскольку эти ставки представляют собой ожидаемые доходности, которые обеспечат себе инвесторы, покупающие эти инструменты. При этом имеется в виду, конечно, *нормированная доходность к погашению,* т. е. *доходность за период от момента покупки до момента погашения.* Следовательно, рыночные цены долговых инструментов будут устанавливаться таким образом, чтобы доходность по ним соответствовала равновесному уровню процентных ставок. Поэтому изменение уровня процентных ставок по каким-либо причинам, например вследствие роста темпов инфляции, приведет к изменению текущей цены депозитного сертификата. Но даже если уровень процентных ставок меняться не будет, цена сертификата, тем не менее, изменится, поскольку меняется оставшийся срок до погашения. Цена сертификата будет меняться так, чтобы доходность за оставшийся срок до погашения оставалась равной значению рыночной ставки процента.

Рассмотрим вопрос о связи цены и рыночной процентной ставки более подробно. В *момент эмиссии* депозитный сертификат продается обычно по *цене, близкой к номиналу.* Это связано с тем, что эмитент устанавливает купонную ставку на уровне, равном рыночной ставке процента. В самом деле, ему нет смысла платить более высокую, чем рыночная, ставку, с другой стороны, он не может установить ее (при прочих равных условиях) меньше уровня ставки по другим альтернативным кредитным инструментам (банковским депозитам, векселям и т. д.), так как инвесторы (кредиторы) будут предпочитать инструменты с более высокой процентной ставкой (доходностью).

Если сертификат продается по номиналу, то ставка стандартной сделки, т. е. покупки и *хранения до погашения,* будет равна рыночной ставке кредита:

$$i_{\text{серт}} = \frac{S - F}{FT_0} = \frac{F(1 + cT_0)}{FT_0} = c = i_{\text{рын}}.$$

Точно так же цена сертификата с течением времени должна меняться так, чтобы в каждый момент времени ставка по стандартной сделке (купить и держать) за оставшийся период до погашения была равна *рыночному уровню ставки:*

$$\mathrm{i}_{\text{рын}} = (\mathrm{S}_{\text{пог}} - \mathrm{P}_{\text{рын}}) / \mathrm{P}_{\text{рын}}\, \mathrm{T}_{\text{пог}}\ , \tag{1.32}$$

где $\mathrm{i}_{\text{рын}}$ – рыночная нормированная процентная ставка; $T = T_{пог}$ – оставшийся срок до погашения; $P = P_{\text{рын}}$ – рыночная цена сертификата; $S = =S_{пог}$ – сумма погашения сертификата.

Отсюда

$$\mathrm{P}_{\text{рын}} = \mathrm{S}_{\text{пог}}/(1 + \mathrm{i}_{\text{рын}}\, \mathrm{T}_{\text{пог}}) = \mathrm{PV}_1(S_{пог}). \tag{1.33}$$

Таким образом, рыночная цена сертификата является текущей стоимостью (приведенной к текущему моменту) суммы погашения $S_{пог}$ по рыночной ставке.

Пример 1.10. Пусть депозитный сертификат с номиналом £1 000, купонной ставкой 15% годовых и сроком обращения 180 дней продан за 70 дней до погашения. Если годовая рыночная процентная ставка в момент продажи составляла 10%, то какова цена продажи сертификата? Использовать банковское правило ACT/360.

Решение. Выразим сначала указанные в днях сроки в годовой шкале согласно банковскому правилу:

$$T_0 = T_{обр} = 180/360 = 0{,}5$$

$$T = T_{пог} = 70/360 = 0{,}1944.$$

Сумма погашения сертификата составит

$$S = S_{пог} = 1\,000(1+0{,}15 \cdot 180/360) = 1075(£).$$

Поскольку рыночная ставка $i = 0{,}1$, то текущая рыночная $P = P_{рын}$ цена сертификата

$$P = \frac{S}{1 + iT} = \frac{1075}{1 + 0{,}1 \cdot \frac{70}{360}} = 1054{,}49(£).$$

Заметим, что владелец сертификата, продавший его за 70 дней до погашения, реализует, вообще говоря, совсем другую процентную ставку сделки. Если он, например, купил сертификат по номиналу в момент эмиссии и продал его по найденной выше цене P, то процентная ставка сделки за период владения сертификатом

$$T_{вл} = 180 - 70 = 110 \text{ (дней)}$$

составляет

$$r_{вл} = 1054{,}49/1000 - 1 = 0{,}05449,$$

т. е. 5,45%. Соответственно нормированная по банковскому правилу ставка сделки равна 18,08%, что больше, чем доходность к погашению, равная рыночной ставке 10%, которой обладает сертификат в момент его покупки новым владельцем.

Таким образом, при досрочной продаже сертификата, т. е. его продаже *до* срока погашения, возникают, по существу, *две* последовательные простые кредитные сделки. Первая осуществляется первоначальным владельцем сертификата, купившим его в момент эмиссии t_0 по номиналу F и продающим его в момент t по рыночной цене P, а вторая сделка осуществляется новым владельцем сертификата, который покупает его по рыночной цене P в момент t и затем погашает его в момент погашения t_1 Диаграмма такой пары сделок изображена на рис. 4.

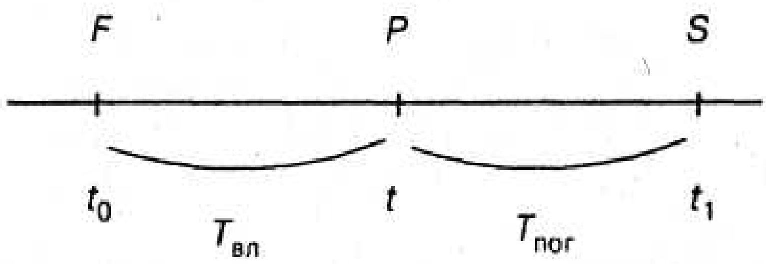

Рис. 4.

Здесь $Т_{вл}$ – срок владения сертификатом первым владельцем; $T_{пог}$ – оставшийся срок до погашения в момент покупки/продажи сертификата, совпадающий со сроком владения сертификатом вторым владельцем. Наконец, полный срок обращения $Т_{обр}$ – сумма указанных сроков:

$$Т_{обр} = Т_{вл} + T_{пог}.$$

Заметим, что рыночный уровень процентных ставок определяет ставку именно *второй* сделки с периодом, оставшимся до погашения. Поэтому доходность за период $T_{пог}$ до погашения, которая гарантируется инвестору, купившему сертификат по цене Р, называется (простой нормированной) *доходностью к погашению сертификата.* Она определяется, естественно, выражением

$$i_{\text{пог}} = \frac{S-P}{PT} = \frac{1}{T} = \left(\frac{S}{P} - 1\right),$$

идентичным (1.32). Различие состоит лишь в интерпретации. Выражение (1.32) – исходное для получения формулы (1.33) цены сертификата по *известной рыночной ставке* (т. е. по известной доходности), тогда как (1.34) служит формулой вычисления доходности к погашению по известной (в момент t) рыночной цене P сертификата.

Таким образом, цена и доходность к погашению взаимно определяют друг друга. В частности, рост процентных ставок $i_{\text{рын}}$ ведет, согласно (1.33), к снижению цены сертификата обратно, рост цены $P_{\text{рын}}$ сертификата ведет к снижению его доходности. Это общая закономерность соотношения цены и доходности долговых обязательств.

Итак, имеются два типа кредитных сделок: те, в которых базовым финансовым параметром является начальная сумма долга, и те, в которых эту роль играет конечная (полная) сумма долга. Первые назовем *процентными,* а вторые – *дисконтными.* Конечно, такое разделение имеет смысл лишь для класса сделок, а не для индивидуальных сделок. Определенный ранее простой класс – это класс процентных сделок. Коротко назовем его *простым процентным классом.* Совершенно аналогично можно определить простой класс дисконтных сделок или *простой дисконтный класс:* класс кредитных сделок назовем простым дисконтным классом, если *нормированная учетная ставка* для всех сделок этого класса *одинакова.* Все сделки такого класса назовем *просто дисконтно-эквивалентными,* а общее значение нормированных учетных ставок для сделок из этого класса – *учетной ставкой класса.*

Естественно, для всех сделок дисконтного класса выполняются соотношения (1.20) – (1.23), в которых d – нормированная учетная ставка класса. Формулы (1.24) и (1.25) также применимы ко всем сделкам класса. Однако вычисленные по этим формулам значения процентных ставок будут различными для разных сделок. Это относится, конечно, и к нормированной процентной ставке i. Как показывает формула (1.25), нормированная процентная ставка i при фиксированной учетной ставке d зависит явным образом от срока сделки. Иными словами, две дисконтно-эквивалентные сделки не обязательно будут просто (процентно) эквивалентными. Однако если сроки этих сделок совпадают, то дисконтная эквивалентность влечет процентную. Верно, разумеется, и обратное утверждение, т. е. простая процентная эквивалентность в общем случае не влечет дисконтную эквивалентность, однако для сделок с одним и тем же сроком оба типа эквивалентности совпадают.

Пример 1.12. Банк учитывает два векселя: один с номиналом £900 и сроком до погашения 3 мес., а другой с номиналом £1500 и сроком до погашения 6 мес. Оба векселя учитываются по одной учетной ставке – 20% годовых. Найти учетные суммы векселей, доход и процентные ставки, которые реализует банк при погашении учетных векселей.

Решение. Учетная цена первого векселя

$$P_1 = 900\left(1 - 0{,}2 \cdot \frac{1}{4}\right) = 885(£),$$

учетная цена второго –

$$P_1 = 1500\left(1 - 0{,}2 \cdot \frac{1}{4}\right) = 1350(£).$$

При погашении первого векселя банк получит доход

$$I_t = 900 - 855 = 45(£).$$

Следовательно, процентная ставка за 3 мес. составит

$$r_t = \frac{45}{855} = 0{,}0526,$$

а годовая ставка

$$i_1 = \frac{r_1}{\frac{1}{4}} = 4r_1 = 0{,}21,$$

или 21%.

При погашении второго векселя доход составит

$$I_2 = 1500 - 1350 = 150\ (£);$$

процентная ставка за 6 мес.

$$r_2 = \frac{150}{1350} = 0{,}1111,$$

а годовая ставка

$$i_2 = \frac{r_2}{\frac{1}{2}} = 2r_2 = 0,2222 \text{ ,}$$

или 22,22%.

Таким образом, хотя учетные годовые ставки сделок совпадают, их процентные годовые ставки (доходности) различны.

Все расчеты с долговыми обязательствами, как процентными, так и дисконтными, осуществляются по основным формулам (1.5) – (1.12) и (1.13) – (1.23). Зная, например, учетную ставку и учетную цену векселя, можно легко найти его номинал (сумму погашения).

Пример 1.13. Пусть вексель со сроком до погашения 4 мес. учтен в банке по цене £1 080. Каков номинал векселя, если учетная ставка банка 30% годовых?

Решение. Учетная цена P связана с номиналом F соотношением

$$P = F(1 - dT).$$

Следовательно, получаем уравнение

$$1080 = F\left(1 - 0,3 \cdot \frac{1}{3}\right)$$

относительно F, решая которое найдем

$$F = \frac{1080}{1 - 0,3 \cdot \frac{1}{3}} = 1200(\zeta)$$

Хотя сделки с процентными и дисконтными бумагами были описаны как два различных класса сделок, между ними нет «непроходимой границы». Так, начатая как процентная, сделка может завершиться тесно связанной с ней дисконтной сделкой. Это имеет место, например, при учете процентных бумаг, операции, вполне аналогичной учету векселей. Поясним ее на примере.

Пусть инвестор покупает депозитный сертификат со сроком погашения 6 мес. по номиналу *(F)* в £1000 и с процентной ставкой i_0 = 12% годовых. Покупая сертификат, инвестор «открывает» процентную сделку. Начальная стоимость S_0 сделки совпадает с номиналом, так как сертификат был куплен по номиналу

$$S_o = \mathrm{F} = 1000(£).$$

Допустим, что через 4 мес. ему понадобились наличные и он решает продать сертификат, т. е. закрыть сделку. Он может сделать это, продав сертификат банку (выпустившему сертификат или другому). Банк, естественно, купит или, как еще говорят, учтет сертификат не по его полной стоимости (сумме погашения), складывающейся из номинала и процентов за 6 мес., т. е.

$$S = 1\,000\left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1\,060(£),$$

а за меньшую сумму, т. е. с дисконтом. Обычно для подобных операций банк фиксирует нормированную, например годовую, учетную ставку *d.* Если для нашего примера взять *d* = 24%, то банк учтет (купит) сертификат по цене:

$$\mathrm{P} = (1 - dT)S = \left(1 - 0{,}24 \cdot \frac{1}{6}\right) 1\,060 = 0{,}96 \cdot 1\,060 = 1\,017{,}6(£).$$

Здесь *T* – срок, оставшийся до погашения сертификата, т. е. 2 мес., или 1/6 года. Заметим, что этот срок не имеет ничего общего со сроком сделки инвестора, который составляет 4 мес. (от покупки до учета). Таким образом, с данным сертификатом осуществляются две сделки.

Одна, осуществляемая инвестором, состоит в покупке сертификата за £ 1 000 и продаже его банку через 4 мес. за £ 1 017,6, и другая, осуществляемая банком, состоит в покупке сертификата по £ 1 017,6 и погашении его через 2 мес. по полной стоимости *S* = £1 060. При этом инвестор, получив за 4 мес. доход в £ 17,6, реализует доходность

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{P} - \mathrm{S}_0}{\mathrm{TS}_0} = \frac{1017{,}6 - 1000}{\frac{1}{3} \cdot 1000} = 0{,}0528,$$

или 5,28% годовых, что значительно меньше, чем «обещанная» доходность, предоставляемая процентной ставкой сертификата $i_0 = 12\%$. Эту доходность инвестор мог бы реализовать, если бы держал сертификат до погашения.

С другой стороны, учет банком сертификата с дисконтом дает ему прибыль

$$1060 - 1017{,}6 = 42{,}4(£)$$

за 2 мес., т. е. доходность

$$i = \frac{42{,}4}{\frac{1}{6} \cdot 1017{,}6} = 0{,}25,$$

или 25% годовых, что намного больше обещанной ставки $i_0 = 12\%$ годовых. Это и естественно: прибыль банка означает убыток инвестора (при фиксированных параметрах сертификата).

Таким образом, учет долговых обязательств, т. е. покупка их банком до срока погашения, означает окончание сделки с этим обязательством для его владельца (инвестора, кредитора) и начало сделки для банка (или другого кредитного учреждения). Поэтому при расчете параметров сделок, связанных с долговыми ценными бумагами, необходимо проявлять осторожность и тщательно следить за «привязкой» реквизитов ценной бумаги к действительным параметрам анализируемой сделки. Для этой цели полезно строить временные диаграммы с указанием соответствующих событий. Так, для рассмотренного выше примера подобная диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 5.

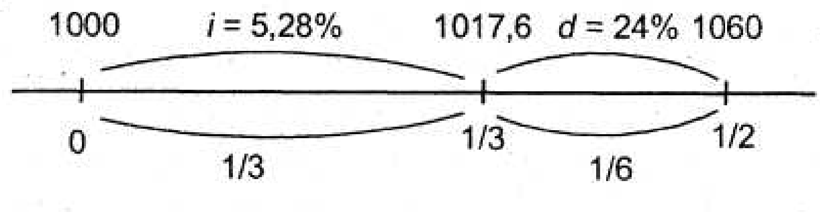

Рис. 5.

В приведенных выше примерах дисконтных сделок временные параметры задавались в месячной или непосредственно в модельной шкале T. На практике они задаются в *календарной* шкале. Таким образом, для использования теоретических формул необходимо (см. примеры 1.7 и 1.8) выполнить предварительное преобразование временных параметров.

Пример 1.14. Вексель номиналом \$1000 куплен по цене \$850 за 90 дней до погашения. Найти соответствующие: а) учетную и б) процентную ставки сделки.

Решение. Исходя из данных задачи, без преобразований можем найти дисконт

$$D = 1000 - 850 = 150(\$),$$

а также за период сделки:

а) учетную ставку

$$w = \frac{150}{1000} = 0,15,$$

или w = 15%;

б) процентную ставку

$$w = \frac{150}{850} = 0,1765,$$

или r = 17,65%.

Найти нормированные ставки без указания правил преобразования невозможно. Допустим, что выбрано правило ACT/360. Тогда нормированная учетная ставка

$$d = \frac{w}{T} = 0,15 \cdot \frac{360}{90} = 0,6,$$

или 60%,

а нормированная процентная ставка

$$i = \frac{r}{T} = 0,1765 \cdot \frac{360}{90} = 0,7059,$$

или 70,59%.

Приведенные примеры сделок с долговыми обязательствами должны убедить читателя в чрезвычайной важности точного учета используемых временных соглашений. Так, полученные в последнем примере значения нормированных учетной и процентной ставок зависят от конкретного правила измерения периодов времени в годовой шкале. Было выбрано банковское правило ACT/360 – достаточно типичное для дисконтных инструментов денежного рынка, например США. Однако в Великобритании расчет этого примера был бы осуществлен (если бы денежные суммы задавались в фунтах стерлингов) по правилу ACT/365. К тому же даже в США банковское правило применялось бы прежде всего для расчета учетной ставки. Если бы инвестору понадобилось значение процентной ставки как меры доходности сделки с векселем, то он мог бы использовать правило, отличное от банковского, например ACT/365 или ACT/ACT.

Хотя для данного типа долговых инструментов или сегмента рынка обычно используется одно из многочисленных временных правил, традиционно закрепленное за ними, может возникнуть необходимость расчета конкретной сделки и по другим временным правилам преобразования. Обычно это происходит при *сравнении* эффективности сделок с инструментами различных типов или сделок из различных сегментов финансового рынка. В таком случае применять разные схемы временных преобразований для разных сделок некорректно, поскольку временные характеристики сделок будут вычисляться по разным правилам. Уже отмечалось, что в разных странах используются разные схемы для вычисления длины временных промежутков в годовой шкале. Так, на денежном рынке США для Казначейских векселей США общепринято правило ACT/360, тогда как для аналогичных Казначейских векселей Великобритании используется правило ACT/365. При необходимости сравнения сделок на этих рынках необходимо выбрать какое–либо одно из этих (или, возможно, других) правил, чтобы временные характеристики сделок оценивались в одной шкале.

Таким образом, хотя *логическая структура* приведенных формул, безусловно, не зависит от конкретных правил измерения временных промежутков, их *конкретные* значения определяются лишь относительно выбранных правил. В последнем примере для нормированной процентной ставки, т. е. доходности сделки с векселем за период до погашения, задаваемой единственной формулой

$$i = \frac{1}{T}\left(\frac{F}{P} - 1\right),$$

получим для данных F = \$1 000 и P = \$850 *целую серию* возможных значений i, определяемых конкретным правилом представления периода сделки, равного 90 дням в годовой шкале:

ACT/360 – i = 0,7059;

ACT/365 – i = 0,7157;

ACT/365 (Япония) – i = 0,7237, если период сделки високосный;

ACT/ACT – i = 0,7157, если период лежит в пределах невисокосного года;

ACT/ACT – I = 0,7176, если период лежит в пределах високосного года;

ACT/ACT – 0,7157 < i < 0,7176, если часть периода приходится на високосный и часть на невисокосный годы.

Приведенный выше список далеко не исчерпывает всех возможных случаев.

Заметим, что выше цена P была задана в долларах. Если бы речь шла, например, о сделке с Казначейскими векселями США, то цена векселя в таком случае могла бы задаваться косвенно, посредством котировки, которые для рынка Казначейских векселей США осуществляются в терминах *учетной ставки с подразумеваемым* применением *банковского правила.*

Так, дилер, оперирующий на этом рынке, мог выставить котировки трехмесячного Казначейского векселя (90 дней) 8,50% на покупку и 8,48% на продажу. Это означает, что дилер согласен купить вексель по цене

$$P_{пок} = 1\,000(1 - 0{,}0850 \cdot 1/4) = 978{,}75(\$),$$

а продать по цене

$$P_{пр} = 1\,000(1 - 0{,}0848 \cdot 1/4) = 978{,}80(\$).$$

Разница между этими ценами составляет *дилерский спред* цен, т. е. доход, получаемый дилером с полной сделки (т. е. покупки с последующей продажей) с каждым векселем. Лицо, купившее вексель у дилера по цене $P_{пр}$= \$978,80, при погашении через 3 мес. заработает \$21,20.

Нормированную процентную ставку (доходность к погашению) такой сделки обычно находят, используя правило АСТ/365:

$$i = \frac{21,20}{978,80 \cdot \frac{90}{365}} = 0,0878.$$

Этот пример любопытен тем, что в нем используются *два различных* временных правила при расчете одной и той же сделки. Так, покупатель векселя у дилера сначала по котировке цены продажи (в терминах учетной ставки) найдет долларовую цену посредством *банковского правила,* а для оценки *доходности* сделки воспользуется правилом АСТ/365.

Заметим, что в этом случае нельзя (как это делалось в примере 1.8) применять формулу (1.16), связывающую учетную и процентную ставки, поскольку в этом случае возникает *неопределенность* со значением срока *T.* Если этот срок задать в соответствии с банковским правилом, то вычисленная доходность к погашению будет соответствовать именно этому правилу, а не примененному выше правилу АСТ/365. Подстановка значения срока в соответствии с правилом АСТ/365 также некорректна, поскольку учетная ставка (котировка) подразумевает в соответствии с принятым на рынке Казначейских векселей применение банковского правила (АСТ/360).

На этом закончим предварительное обсуждение простых кредитных сделок и связанных с ними характеристик, прежде всего процентной и учетной ставок.

Оглавление

Учебное издание

Балабаев Владимир Евгеньевич

Базовые элементы финансовой математики

Методические указания

Редактор, корректор М. В. Никулина
Верстка И. Н. Иванова

Подписано в печать 16.04.12. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Гарнитура "Times New Roman". Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,02.
Тираж 17 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

В. Е. Балабаев

Базовые элементы финансовой математики