Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

А. В. Смирнов

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Практикум

*Рекомендовано научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению
Фундаментальная информатика и информационные технологии*

Ярославль
ЯрГУ
2015

УДК 004.94(072)
ББК З973.2я73
С 50

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2015 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики ЯрГУ

Смирнов, Александр Валерьевич.

С 50 Компьютерное моделирование : практикум / А. В. Смирнов ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2015. — 52 с.

Практикум содержит задания для лабораторных работ с кратким описанием методов, которые нужно реализовать, и исходные данные для их выполнения.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 02.03.02 (010300.62) Фундаментальная информатика и информационные технологии (дисциплина «Компьютерное моделирование», цикл Б3), очной формы обучения.

УДК 004.94(072)
ББК З973.2я73

Оглавление

1. Предисловие

Данная дисциплина знакомит студентов с некоторыми методами численного статистического моделирования. *Численное статистическое моделирование* — это реализация с помощью компьютерной вероятностной модели некоторого объекта с целью оценивания изучаемых интегральных характеристик на основе закона больших чисел. Основные разделы, изучаемые в курсе:

1. Методы построения датчиков псевдослучайных чисел.
2. Моделирование дискретных и непрерывных случайных величин.
3. Вычисление n-мерного интеграла методом Монте-Карло.

Практикум содержит основные теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ и для подготовки к экзамену по предмету, а также варианты лабораторных работ.

Отметим, что все теоретические результаты мы будем формулировать кратко, без доказательств. Более подробные сведения можно найти в книгах из списка рекомендуемой литературы.

2. Стандартное случайное число и его свойства

2.1. Основные свойства стандартного случайного числа

Определение. Функция $f(u) = f(u_1, \dots, u_l)$ называется *плотностью распределения* многомерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$, если для любого борелевского множества $D \subseteq \mathbb{R}^l$ выполнено

$$P(\xi \in D) = \int\limits_D f(u)du = \int\limits_D f(u_1, \dots, u_l)du_1 \dots du_l. \tag{1}$$

Напомним, что *борелевское множество из* $\mathbb{R}^l$ — это множество, полученное из открытых l-мерных прямоугольных параллелепипедов с помощью конечного или счетного числа операций объединения, пересечения и дополнения.

Для успешного моделирования различных случайных величин нам необходимо получить генератор стандартных случайных чисел $\alpha_i \in (0,1)$, являющихся значениями случайной величины α, *равномерно* распределенной в этом интервале. Случайная величина α имеет плотность

$$f(u) \equiv 1, \quad 0 < u < 1 \tag{2}$$

и функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0]; \\ x, & x \in (0,1); \\ 1, & x \in [1, +\infty). \end{cases} \tag{3}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины α равны

$$M\alpha = \int\limits_0^1 uf(u)du = \frac{1}{2}; \quad D\alpha = M\alpha^2 - (M\alpha)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \tag{4}$$

Обозначим через $V(G)$ объем произвольной области $G \subseteq \mathbb{R}^l$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если l-мерная точка α равномерно распределена в области $G_1 \subset \mathbb{R}^l$ конечного объема $V(G_1) = \int\limits_{G_1} du$, то она равномерно распределена также в произвольной подобласти $G \subseteq G_1$ объема $V(G)$ при условии попадания в эту подобласть; при этом $P(\alpha \in G) = \frac{V(G)}{V(G_1)}$.*

Следствие 1. *Пусть $(a, b) \subseteq (0, 1)$. Тогда случайная величина α равномерно распределена в (a, b) при условии попадания в этот интервал и $P(\alpha \in (a, b)) = b - a$.*

Стандартная случайная величина $\alpha \in (0, 1)$, поэтому двоичное представление для любого выборочного значения α, очевидно, будет иметь вид

$$\alpha = 0, \alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(k)} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k}, \tag{5}$$

где все $\alpha^{(k)} \in \{0, 1\}$.

Лемма 2. *Для того чтобы случайная величина α была равномерно распределена в интервале $(0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы двоичные цифры $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}, \ldots$ из соотношения (5) представляли собой последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$: $P(\alpha^{(k)} = 1) = P(\alpha^{(k)} = 0) = \frac{1}{2}$.*

2.2. Два типа генераторов стандартных случайных чисел. Мультипликативный метод вычетов

Из леммы 2 фактически следует, что стандартное случайное число должно иметь бесконечную мантиссу, которую невозможно реализовать с помощью ЭВМ. Однако на практике бывает достаточно ограничить длину мантиссы некоторым большим числом.

Можно выделить два типа генераторов стандартных случайных чисел:

1. *Физические датчики случайных чисел* — это технические устройства, вырабатывающие случайную последовательность двоичных цифр.

2. *Генераторы псевдослучайных чисел* — компьютерные программы. В большинстве расчетов по методу Монте-Карло используются именно эти

генераторы. Далее будут рассмотрены способы организации таких генераторов.

Большинство известных алгоритмов реализации псевдослучайных чисел имеет вид

$$\alpha_{n+1} = \psi(\alpha_n), \tag{6}$$

где начальное число α_0 задано. Областью значений функции ψ должен являться интервал $(0,1)$. При этом пары точек

$$(\alpha_1, \alpha_2 = \psi(\alpha_1)), \quad (\alpha_3, \alpha_4 = \psi(\alpha_3)), \quad (\alpha_5, \alpha_6 = \psi(\alpha_5)), \quad \ldots \tag{7}$$

должны располагаться на кривой $y = \psi(x)$ и быть равномерно распределенными в квадрате $Q_2 = \{(x,y) : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$, то есть график функции $\psi(x)$ должен достаточно плотно заполнять квадрат Q_2. Пример такой функции $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \{Kx\}, \tag{8}$$

где K — достаточно большой множитель, $\{A\}$ — дробная часть числа A.

Алгоритм (6) с функцией (8) называется *мультипликативным методом вычетов* и является одним из наиболее часто употребляемых алгоритмов при моделировании псевдослучайных чисел.

Рассмотрим теперь *свойства преобразования* $\beta = \{K\alpha\}$.

Лемма 3. *Случайная величина* $\beta = \{K\alpha\}$ *равномерно распределена в интервале* $(0,1)$ *при любом натуральном значении множителя* K.

Члены последовательности $\{\alpha_n\}$ являются взаимозависимыми, поэтому важно рассмотреть следующее утверждение.

Лемма 4. *Коэффициент корреляции имеет вид*

$$r(\alpha, \beta^{(s)}) = M\left(\left(\frac{\alpha - M\alpha}{\sqrt{D\alpha}}\right)\left(\frac{\beta^{(s)} - M\beta^{(s)}}{\sqrt{D\beta^{(s)}}}\right)\right) = \frac{1}{K^s} \quad \forall K \in \mathbb{N},$$

где $\beta^{(s)} = \{K\beta^{(s-1)}\}$, $\beta^{(0)} = \alpha$, $s = 1, 2, \ldots$.

Последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ обладает также *свойством k-равномерности*, которое состоит в том, что векторы

$$\alpha_1^{(k)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k),\ \alpha_2^{(k)} = (\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{2k}),\ \ldots,\ \alpha_n^{(k)} = (\alpha_{k(n-1)+1}, \ldots, \alpha_{nk}) \quad (9)$$

должны с ростом n с вероятностью 1 равномерно заполнять единичный k-мерный куб Q_k.

Леммы 3 и 4 сформулированы для стандартного случайного числа α с бесконечной мантиссой. Аналоги этих утверждений можно сформулировать и для чисел α_n с ограниченной мантиссой длины m. При этом для достаточно больших значений m и при удачном выборе множителя K статистические свойства такой последовательности типа (6), (8) и стандартного случайного числа α с бесконечной мантиссой будут близки.

Часто в качестве начального элемента последовательности (6), (8) выбирается $\alpha_0 = 2^{-m}$, а множитель имеет вид $K = 5^{2p+1}$, где p — натуральное число. Справедливо представление

$$\alpha_n = k_n 2^{-m}; \quad k_0 = 1, \quad k_n = k_{n-1} 5^{2p+1} \mod 2^m. \qquad (10)$$

Недостатком мультипликативного метода вычетов (10) является то, что количество чисел из интервала $(0, 1)$, имеющих мантиссу длины m, конечно, а последовательность (10) периодическая, то есть найдется такое натуральное значение L, что

$$\alpha_{L+i} = \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots \qquad (11)$$

Наименьшее L, удовлетворяющее соотношению (11), называется *длиной периода*. Для расчетов не рекомендуется использовать больше, чем $\frac{L}{2}$ чисел последовательности (6), (8). Отметим, что для метода (10) $L = 2^{m-2}$, поскольку все элементы α_n являются m-разрядными двоичными дробями, оканчивающимися на 01.

Также отметим, что для алгоритмов с числом испытаний $n \leq 10^9$ возможно использовать генератор (10) с параметрами $m = 40$ и $p = 8$.

3. Моделирование дискретных распределений

3.1. Стандартный алгоритм

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает конечное число значений $x_1, \ldots, x_N$. При этом

$$P(\xi = x_i) = p_i; \quad p_i > 0; \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1. \tag{12}$$

Из соотношений (12) следует, что интервал $(0,1)$ можно разбить на полуинтервалы Δ_m длины p_m:

$$\Delta_m = [R_{m-1}, R_m); \quad R_m = \sum_{i=1}^{m} p_i; \quad m \in \overline{1,N};$$

для $m = 1$ полагаем $R_{m-1} = R_0 = 0$. Реализуем выборочное значение α стандартного случайного числа. $P(\alpha \in \Delta_m) = p_m$ (по следствию 1). Таким образом, если $\alpha \in \Delta_m$, то для данного испытания полагаем $\xi = x_m$.

Однако мы можем обойтись без вычисления сумм R_m. Рассмотрим следующий алгоритм.

Алгоритм 1 (*стандартный алгоритм*)

1. Реализуем значение α стандартного случайного числа и полагаем $Q := \alpha$ и $m := 1$.

2. Производим переприсваивание:

$$Q := Q - p_m. \tag{13}$$

3. Если $Q \leq 0$, то полагаем $\xi = x_m$ и выходим из алгоритма. Иначе $m := m + 1$ и переходим на шаг 2.

Отметим, что важным примером дискретных случайных величин являются *целочисленные случайные величины* η, для которых

$$x_i = i, \quad P(\eta = i) = p_i, \quad i \in \overline{1,N}. \tag{14}$$

Лемма 5. *Оптимальным распределением вероятностей, при котором средняя трудоемкость алгоритма 1 будет минимальной, является*

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_N. \tag{15}$$

3.2. Случаи малого и бесконечного числа значений

В случае $N = 2$ алгоритм 1 примет следующий вид.

Алгоритм 2. Реализуем значение α стандартного случайного числа. Если $\alpha < p_1$, то $\xi = x_1$, иначе $\xi = x_2$.

Если $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, то ξ — *бернуллиевская случайная величина* с вероятностью успеха p_1. В этом случае алгоритм 2 описывает моделирование случайного события A.

В случае $N = \infty$ для задания распределения (12) вместо конкретных величин $\{x_i\}$ и вероятностей $\{p_i\}$ задаются формулы их вычисления:

$$x_i = \varphi(i); \quad p_i = \psi(i). \tag{16}$$

Для вычисления вероятностей часто бывают более удобны рекуррентные формулы вида

$$p_{i+1} = z(p_i), \quad \text{или} \quad p_{i+1} = p_i r(i+1). \tag{17}$$

При реализации алгоритма 1 в случае бесконечного числа значений перед вычитанием соответствующей вероятности требуется вычислить ее по одной из формул (16) или (17).

Алгоритм 3

1. Реализуем выборочное значение α стандартного случайного числа. Полагаем $Q := \alpha$, $m := 1$ и $P := p_1$ ($P := \psi(1)$).

2. Производим переприсваивание:

$$Q := Q - P. \tag{18}$$

3. Если $Q \leq 0$, то полагаем $\xi = \varphi(m)$ и выходим из алгоритма. Иначе $m := m + 1$, $P := \psi(m)$ (или $P := z(P)$, или $P := Pr(m)$) и переходим на шаг 2.

Рассмотрим целочисленные случайные величины η с распределением (14) при $i \in \overline{1, \infty}$. Для них $x_i = \varphi(i) = i$. Эти случайные величины связаны с *испытаниями Бернулли* γ, для которых

$$P(\gamma = 1) = p, \quad P(\gamma = 0) = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Событие $\{\gamma = 1\}$ называется *успехом* (p — *вероятность успеха*), а событие $\{\gamma = 0\}$ — *неуспехом*.

Пример 1. *Геометрическое распределение* с параметром p. Здесь

$$p_i = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Соответствующая случайная величина η определяет количество испытаний Бернулли γ до получения первого успеха. При реализации алгоритма 3 для подсчета вероятностей целесообразно использовать рекуррентную формулу (17) при

$$r(i+1) = \frac{p_{i+1}}{p_i} \equiv 1 - p.$$

Пример 2. *Биномиальное распределение* с параметрами p и N. Здесь

$$p_i = C_N^i p^i (1-p)^{N-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{20}$$

Соответствующая случайная величина

$$\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N \tag{21}$$

определяет количество успехов в N испытаниях Бернулли. При реализации алгоритма 3 следует сначала полагать $m := 0$ вместо $m := 1$. Для пересчета вероятностей используется формула (17) при

$$r(i+1) = \frac{p}{q} \cdot \frac{N-i}{i+1}.$$

Пример 3. *Распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$. Здесь

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

Согласно теореме Пуассона, это распределение является предельной формой биномиального распределения при

$$N \to \infty, \quad p(N) \to 0, \quad Np(N) \to \lambda. \tag{23}$$

При реализации алгоритма 3 следует сначала полагать $m := 0$. Для пересчета вероятностей используется формула (17) при

$$r(i+1) = \frac{\lambda}{i+1}.$$

3.3. Специальные алгоритмы моделирования дискретного распределения

Пусть имеется дискретное равномерное распределение ξ. Тогда

$$x_1, \ldots, x_N : \quad p_i = \frac{1}{N} \quad \forall i \in \overline{1, N}.$$

Алгоритм 4 (*моделирование дискретного равномерного распределения*). Реализуем выборочное значение α стандартного случайного числа и полагаем

$$m = \lfloor \alpha N \rfloor + 1 = \lfloor \alpha N + 1 \rfloor \tag{24}$$

и $\xi = x_m$.

Рассмотрим теперь подход, который состоит в *приведении вероятностей к общему знаменателю.*

Пусть ξ — дискретное распределение с конечным, относительно небольшим количеством значений N. Пусть также все вероятности p_i — это обыкновенные дроби, которые можно привести к общему знаменателю M, то есть $p_i = \frac{m_i}{M}$, причем $m_1 + \ldots + m_N = M$ и $M \leq M_0$, где M_0 — размер максимального массива для данного компьютера и языка программирования.

Рассмотрим случайную величину ξ', эквивалентную случайной величине ξ и такую, что

$$\xi' = x'_j = x_i \quad \text{при} \quad j = \sum_{s=1}^{i-1} m_s + 1, \ \ldots, \ \sum_{s=1}^{i} m_s,$$

причем $P(\xi' = x'_j) = \frac{1}{M}$. Это значит, что первые m_1 значений x'_j равны x_1, следующие m_2 значений x'_j равны x_2 и т. д., причем все значения x'_j равновероятны.

Выборочные значения случайной величины ξ' реализуются согласно алгоритму 4: $\xi' = x'_{m'}$ при $m' = \lfloor M\alpha \rfloor + 1$. Таким образом, алгоритм 1 для случайной величины ξ меняется на алгоритм 4 для случайной величины ξ'.

Пусть теперь N умеренно большое ($N \approx \frac{M_0}{2}$).

Представим распределение ξ в виде диаграммы, состоящей из столбцов единичной ширины и высоты p_i. Проведем на высоте $h = \frac{1}{N}$ линию, параллельную основанию диаграммы. Возможно так перераспределить части столбцов, чтобы все N столбцов имели высоту h и содержали не более 2 частей исходных столбцов.

Процедура выбора:

1. Выбираем максимальный и минимальный столбцы с номерами l и m соответственно. При этом $p_l > \frac{1}{N}$, $p_m < \frac{1}{N}$.

2. Дополняем m-й столбец частью l-го до высоты $h = \frac{1}{N}$. Это возможно, так как на любом шаге процесса $p_{\min} + p_{\max} \geq \frac{1}{N}$, иначе $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i < 1$.

3. Создаем двумерную ячейку E_m, в которой хранится число $F_m = Np_m$ (p_m — минимальная на данном шаге величина столбца) и номер столбца l, из которого взято дополнение m-го столбца. В дальнейшем m-я ячейка не меняется.

Если исходный m-й столбец имел высоту $h = \frac{1}{N}$, то он заменяется на двумерную ячейку E_m, в которой вторая координата пуста.

Шаги 1–3 повторяем до тех пор, пока на всех местах не возникнут двумерные ячейки E_j.

Алгоритм 5 (*метод Уолкера*)

1. Перераспределяем вероятности в соответствии с указанной выше процедурой выбора.

2. Согласно формуле $m = \lfloor \alpha_1 N + 1 \rfloor$ (соотношение (24)) выбираем номер ячейки $E_m = (F_m; l)$.

3. Реализуем второе выборочное значение α_2 стандартной случайной величины. Если $\alpha_2 < F_m$, то $\xi = x_m$, иначе $\xi = x_l$.

Рассмотрим теперь случай большого N ($N > M_0$ или $N = \infty$).

Зададим целое число S и разобьем интервал $(0, 1)$ на S равных частей $\left[\frac{j-1}{S}, \frac{j}{S}\right)$, $j \in \overline{1, S}$. Построим массив чисел $\{X_j\}_{j=1}^{S}$:

$$X_j = \min\left\{k:\ R_k = p_1 + \ldots + p_k \geq \frac{j-1}{S}\right\},$$

который называется *массивом нижних квантилей*. Этот массив задает номер k элемента, с которого следует начинать поиск «вверх» (то есть вычитать величины R_q, $q = k, k+1, \ldots$ из α до получения первого отрицательного значения) при $\frac{j-1}{S} \leq \alpha < \frac{j}{S}$.

Алгоритм 6 (*квантильный метод*)

1. Реализуем выборочное значение α стандартного случайного числа.

2. Вычисляем номер j полуинтервала $\left[\frac{j-1}{S}, \frac{j}{S}\right)$, в который попадает α по формуле (24): $j = \lfloor S\alpha + 1 \rfloor$.

3. Реализуем последовательный поиск «снизу вверх», начиная с R_{X_j} (как в алгоритме 1). При этом $\{X_j\}$ и $\{R_{X_j}\}$ хранятся в оперативной памяти.

Отметим, что при $N \leq 3M_0$ целесообразно выбрать S такое, что $\frac{N}{S} \approx 3$. При $N = \infty$ следует выбрать $S \approx M_0$.

Алгоритм 7 (*бинарный поиск*)

1. Реализуем выборочное значение α стандартного случайного числа. Полагаем $s_1 := 1$, $s_2 := N + 1$.

2. Вычисляем $k := \lfloor \frac{s_1 + s_2}{2} \rfloor$.

3. Если $R_k = p_1 + \ldots + p_k < \alpha$, то полагаем $s_1 := k$, иначе $s_2 := k$.

4. Если $s_2 - s_1 > 1$, то переходим на шаг 2, иначе полагаем $m = s_1$ и $\xi = x_m$.

Суммы R_k при этом хранятся в оперативной памяти.

Пусть теперь $N > M_0$ и формула пересчета вероятностей $p_i = \psi(i)$ меняется после получения очередного выборочного значения.

Алгоритм 8 (*метод «мажорантной частоты»*)

1. Реализуем α и по формуле (24) находим равномерно распределенный номер m.

2. Реализуем α'. Если $p_m > \alpha' p_{\max}$, то возвращаемся на шаг 1 (здесь $p_{\max} = \max\{p_1, \ldots, p_N\}$), иначе $\xi = x_m$.

Если подсчет $p_{\max}$ затруднен, то можно положить $p_{\max} = 1$.

Пусть теперь η — случайная величина, имеющая геометрическое распределение.

Алгоритм 9. Моделирование проводится по формуле

$$\eta = \left\lfloor \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1, \quad 0 < p < 1. \tag{25}$$

Алгоритм 10 (*метод браковки*). Реализуем последовательность бернуллиевских случайных величин $\{\gamma_i\}$ с вероятностью успеха p.

Поскольку $\xi = \min\{i : \ \gamma_i = 1\}$, будем последовательно проверять неравенства $\{\alpha_i < p\}$ до тех пор, пока одно из них не окажется верным.

Пусть теперь η — случайная величина с пуассоновским распределением.

Алгоритм 11. Случайную величину η, имеющую распределение Пуассона, можно моделировать по формуле

$$\eta = \min\left\{ m : \ \prod_{k=0}^{m} \alpha_k < e^{-\lambda} \right\}. \tag{26}$$

4. Моделирование непрерывных случайных величин

4.1. Метод обратной функции распределения

Рассмотрим теперь методы моделирования непрерывных случайных величин.

Пусть случайная величина $\xi \in (a,b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, а ее функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ непрерывна и строго возрастает при $x \in (a,b)$, при этом $F(x) = 0$, если $x \le a$; $F(x) = 1$, если $x \ge b$. Если $a = -\infty$, то полагаем $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; если $b = +\infty$, то полагаем $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. При этом $P(x = x_0) = 0$ и

$$P(\xi \in (c,d)) = F(d) - F(c). \tag{27}$$

Алгоритм 12 (*метод обратной функции распределения*). Для моделирования выборочного значения $\xi \in (a,b)$ используем формулу

$$\xi = F^{-1}(\alpha), \tag{28}$$

где α — стандартное случайное число.

Очевидно, что для практического применения алгоритма 12 необходимо, чтобы обратная функция вычислялась достаточно просто, в связи с чем возникает следующая задача.

Задача 1. Представить зависимость $\psi(x) = F^{-1}(x)$ в виде простой композиции элементарных функций так, чтобы вычисление значения $\psi(x)$ могло быть эффективно реализовано на компьютере.

Определение. В случае когда задача 1 разрешима, будем называть распределение случайной величины ξ, а также соответствующие ей формулу (28) и алгоритм 12 *элементарными*.

Для случайных величин, имеющих элементарное распределение, алгоритм 12 является, как правило, наиболее эффективным.

Пусть распределение случайной величины $\xi \in (a,b)$ является абсолютно непрерывным. В этом случае найдется такая функция $f(u) \ge 0$, что для любого интервала $(c, d) \subseteq (a, b)$ выполнено

$$P(\xi \in (c, d)) = \int\limits_c^d f(u)du. \tag{29}$$

В этом случае $f(u)$ является *плотностью распределения* ξ. Она определена с точностью до значений на множестве меры нуль. Свойства функции $f(u)$:

$$f(u) \geq 0 \quad \text{при} \quad u \in (a, b); \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \int\limits_a^b f(u)du = 1; \tag{30}$$

$$f(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \notin (a, b). \tag{31}$$

Пусть при $u \in (a, b)$ множество точек, где $f(u) = 0$, имеет меру нуль. Из (27), (29) следует, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x f(u)du \tag{32}$$

и $f(u) = \frac{dF(u)}{du}$ почти всюду. Из (32) следует, что абсолютно непрерывное распределение можно задавать плотностью $f(u)$. Соответствующие случайные величины ξ будем называть *непрерывными*.

Пусть имеется непрерывная случайная величина $\xi \in (a, b)$ с плотностью $f(u)$. Так как ξ и $F^{-1}(\alpha)$ принадлежат интервалу (a, b), а $F(x)$ возрастает на этом интервале, то формулу (28) можно переписать в эквивалентном виде $F(\xi) = \alpha$. В силу (31), (32) получаем

$$\int\limits_a^\xi f(u)du = \alpha. \tag{33}$$

Распределение случайной величины ξ является *элементарным*, если решение интегрального уравнения (33) представимо в виде $\xi = \psi(\alpha)$, где $\psi(\alpha)$ — простая композиция элементарных функций.

Уравнение (33) может быть неразрешимо в случае, если интеграл в левой части является неберущимся. Такая ситуация возникает, например, для нормального распределения

$$f(u) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < u < +\infty. \tag{34}$$

Также уравнение (33) будет неразрешимо, если полученное после интегрирования уравнение неразрешимо. Так, для полиномиального распределения

$$f(u) = \sum_{i=0}^{A} a_i u^i, \quad 0 < u < 1, \quad A = N \vee +\infty \tag{35}$$

уравнение (33) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{A} \frac{a_i \xi^{i+1}}{i+1} = \alpha. \tag{36}$$

Подобное уравнение неразрешимо в большинстве случаев.

Рассмотрим теперь примеры, когда алгоритм 12 применим.

Пример 4. *Экспоненциальное распределение* с плотностью

$$f(u) = \lambda e^{-\lambda u}, \quad u > 0, \quad \lambda > 0. \tag{37}$$

Решив уравнение $\int\limits_0^\xi \lambda e^{-\lambda u} du = \alpha$, мы получим формулу $\xi = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}$. Поскольку случайная величина $\alpha' = 1 - \alpha$ равномерно распределена в интервале $(0, 1)$, то

$$\xi = -\frac{\ln \alpha'}{\lambda}. \tag{38}$$

Пример 5. *Степенное распределение* с плотностью

$$f(u) = cu^{c-1}, \quad 0 < u < 1, \quad c > 0. \tag{39}$$

Решением уравнения (33) является $\xi^c = \alpha$, или

$$\xi = \alpha^{\frac{1}{c}}. \tag{40}$$

Пример 6. *Распределение Парето* с плотностью

$$f(u) = cu^{-c-1}, \quad u > 1, \quad c > 0. \tag{41}$$

Решением уравнения (33) является $\xi = (1-\alpha)^{-\frac{1}{c}}$. Учитывая, что случайная величина $\alpha' = 1 - \alpha$ равномерно распределена в интервале $(0, 1)$, получаем

$$\xi = (\alpha')^{-\frac{1}{c}}. \tag{42}$$

Пример 7. *Индикатриса Хеньи–Гринстейна* с плотностью

$$f(u) = \frac{1-\mu^2}{2(1+\mu^2-2\mu u)^{3/2}}, \quad u, \mu \in (-1, 1). \tag{43}$$

Решением уравнения (33) является

$$\xi = \frac{1}{2\mu}\left(1+\mu^2 - \left(\frac{1-\mu^2}{2\mu\alpha + 1 - \mu}\right)^2\right). \tag{44}$$

4.2. Метод обратной функции распределения для составных плотностей

Рассмотрим теперь случайную величину $\xi \in (a, b)$, имеющую *составную плотность* вида

$$f(u) = \begin{cases} p_1 f_1(u), & u \in (a, c); \\ p_2 f_2(u), & u \in [c, b), \end{cases}$$

или

$$f(u) = p_1 f_1(u)\chi_{(a,c)}(u) + p_2 f_2(u)\chi_{[c,b)}(u), \tag{45}$$

где $\chi_A(u)$ — индикатор множества A; $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$; $f_1(u)$ и $f_2(u)$ — плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2, имеющих элементарные распределения.

Алгоритм 13. Если $\alpha \le p_1$, то $\xi = \psi_1\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)$, иначе $\xi = \psi_2\left(\frac{\alpha - p_1}{p_2}\right)$.

Пример 8. Пусть случайная величина ξ имеет плотность

$$f(u) = \begin{cases} cu^{\nu-1}, & 0 < u < 1, \quad 0 < \nu < 1; \\ ce^{-\lambda u}, & u \ge 1, \quad \lambda > 0, \end{cases}$$

или $f(u) = c\left(u^{\nu-1}\chi_{(0,1)}(u) + e^{-\lambda u}\chi_{[1,\infty)}(u)\right)$, где $c = \frac{\lambda}{\lambda\nu^{-1} + e^{-\lambda}}$. Вычислив интегралы от функций $h_1(u) = cu^{\nu-1}$ и $h_2(u) = ce^{-\lambda u}$, перепишем эту плотность в виде (45):

$$f(u) = p_1\left(\nu u^{\nu-1}\right)\chi_{(0,1)}(u) + p_2\left(\frac{\lambda e^{-\lambda u}}{e^{-\lambda}}\right)\chi_{[1,\infty)}(u),$$

где $p_1 = \frac{\lambda\nu^{-1}}{\lambda\nu^{-1} + e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda + \nu e^{-\lambda}}$ и $p_2 = 1 - p_1$.

Функция $f_1(u) = \nu u^{\nu-1}$ является степенной плотностью вида (39) при $c = \nu$, соответствующая моделирующая формула имеет вид (40): $\xi_1 = \alpha^{\frac{1}{\nu}}$. Функция $f_2(u) = \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{e^{-\lambda}}$, $u > 1$ является плотностью усеченного экспоненциального распределения. По аналогии с примером 4 моделирующая формула будет иметь вид $\xi_2 = 1 - \frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}$.

Алгоритм 13 в этом случае выглядит следующим образом:

$$\xi = \begin{cases} \left(\frac{\alpha\left(\lambda+\nu e^{-\lambda}\right)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}}, & \alpha \leq \frac{\lambda}{\lambda+\nu e^{-\lambda}}; \\ -\frac{\ln\left((1-\alpha)\left(e^{-\lambda}+\lambda\nu^{-1}\right)\right)}{\lambda}, & \alpha > \frac{\lambda}{\lambda+\nu e^{-\lambda}}. \end{cases} \tag{46}$$

Здесь замену $\alpha' = 1-\alpha$ делать нельзя, так как вторая часть формулы верна только при $\alpha > p_1$.

Отметим также, что алгоритм 13 можно обобщить для случая, когда интервал (a, b) разбит более, чем на два непересекающихся интервала.

4.3. Метод дискретной суперпозиции

В данном разделе мы рассмотрим *модифицированный метод дискретной суперпозиции*, использующийся для моделирования случайных величин следующего вида.

Пусть случайная величина $\xi \in (a, b)$, а плотность ее распределения

$$f(u) = \sum_{i=1}^{M} p_i f_i(u), \quad f_i(u) = f_\xi(u \mid \eta = i). \tag{47}$$

Здесь $P(\eta = i) = p_i$, $i \in \overline{1, M}$, $M \leq \infty$.

Пусть выборочное значение случайной величины ξ моделируется методом обратной функции распределения, то есть выражение $\xi = \psi_m(\alpha)$ получается с помощью решения уравнения

$$\int_a^\xi f_m(u) du = \alpha. \tag{48}$$

Лемма 6. *Случайная величина* $\beta = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m-1} p_i\right) p_m^{-1}$ *равномерно распределена в* $(0, 1)$.

Алгоритм 14 (*модифицированный метод дискретной суперпозиции*)

1. Реализуем выборочное значение стандартного случайного числа α. Согласно вероятностям $\{p_i\}$, используя алгоритм 1 или его модификации, выберем номер m.

2. Реализуем выборочное значение случайной величины $\xi \in (a, b)$ по формуле $\xi = \psi_m(\beta)$, полученной с помощью решения уравнения

$$\int\limits_a^\xi f_m(u)du = \beta, \quad \beta = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m-1} p_i\right) p_m^{-1} \tag{49}$$

относительно переменной ξ.

Пример 9. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(u) = \frac{5}{12}\left(1 + (u-1)^4\right), \quad 0 < u < 2.$$

Эта функция не является плотностью элементарного распределения, так как соотношение $\int\limits_0^\xi f(u)du = \alpha$ равносильно уравнению $(\xi - 1)^5 + 5\xi = 12\alpha - 1$, которое неразрешимо относительно ξ.

Справедливо представление

$$f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u),$$

где $p_1 = \frac{5}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $f_1(u) \equiv \frac{1}{2}$, $f_2(u) = \frac{5}{2}(u-1)^4$.

Моделирующие формулы метода суперпозиции выглядят следующим образом. $\beta = \frac{6}{5}\alpha$ при $m = 1$ и $\beta = 6\alpha - 5$ при $m = 2$, поэтому

$$\xi = \begin{cases} \frac{12}{5}\alpha, & \alpha < \frac{5}{6}; \\ 1 + (12\alpha - 11)^{\frac{1}{5}}, & \alpha \geq \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь составную плотность, сосредоточенную на M интервалах

$$f(u) = \sum_{i=1}^{M} p_i f_i(u) \chi_{(a_i, b_i)}(u), \quad u \in (a_1, b_1) \cup \ldots \cup (a_M, b_M). \tag{50}$$

Здесь $\{f_i(u)\}$ — элементарные плотности, а $\{(a_i, b_i)\}$ — непересекающиеся интервалы. Алгоритм 13 легко обобщить для $M > 2$.

Пусть для определенности $b_i \le a_{i+1}$, $i \in \overline{1, M-1}$. Уравнение (33) для плотности (50) записывается в виде

$$\int_{a_1}^{\xi} \sum_{i=1}^{M} p_i f_i(u) \chi_{(a_i,b_i)}(u) du = \alpha. \tag{51}$$

Алгоритм 15. Находим номер m такой, что $\alpha \in \Delta_m = \left[\sum_{i=1}^{m-1} p_i, \sum_{i=1}^{m} p_i\right)$ (алгоритм 1) и полагаем $\xi = \psi_m(\beta)$, где $\xi = \psi_m(\alpha)$ — формула метода обратной функции распределения, соответствующая элементарной плотности $f_m(u)$, и $\beta = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m-1} p_i\right) p_m^{-1}$.

Лемма 7. *Метод обратной функции распределения для случайной величины ξ с составной плотностью вида (50) (алгоритм 15) совпадает с методом суперпозиции (алгоритм 14) с определением номера m согласно стандартному методу моделирования дискретных случайных величин (алгоритм 1).*

4.4. Моделирование кусочно-постоянной и кусочно-линейной плотностей

Пусть случайная величина ξ_1 имеет кусочно-постоянную плотность распределения вида

$$\begin{gathered} f_1(u) = v_i, \quad x_{i-1} \le u < x_i, \quad i \in \overline{1, M}; \\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = b; \quad v_i > 0. \end{gathered} \tag{52}$$

Алгоритм 16 (*моделирование кусочно-постоянной плотности, метод обратной функции распределения*)

1. Реализуем значение стандартной случайной величины α и полагаем $q_1 := \alpha$ и $n_1 := 1$.

2. Производим переприсваивание:

$$q_1 := q_1 - v_{n_1}(x_{n_1} - x_{n_1-1}). \tag{53}$$

3. Если $q_1 \le 0$, то полагаем $\xi_1 = x_{n_1} + \frac{q_1}{v_{n_1}}$ и выходим из алгоритма. В противном случае полагаем $n_1 := n_1 + 1$ и переходим на шаг 2.

Рассмотрим также случайную величину ξ_2 с кусочно-линейной плотностью

$$\begin{aligned} &f_2(u) = v_{i-1} + (u - x_{i-1})\tfrac{\Delta v_i}{\Delta x_i}, \quad u \in [x_{i-1}, x_i); \\ &\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad \Delta v_i = v_i - v_{i-1}; \quad v_i \geq 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Алгоритм 17 (*моделирование кусочно-линейной плотности, метод обратной функции распределения*)

1. Реализуем значение стандартной случайной величины α и полагаем $q_2 := \alpha$ и $n_2 := 1$.

2. Производим переприсваивание:

$$q_2 := q_2 - \frac{(v_{n_2-1} + v_{n_2})(x_{n_2} - x_{n_2-1})}{2}. \tag{55}$$

3. Если $q_2 \leq 0$, то вычисляем значение ξ_2 по формуле

$$\xi_2 = x_{n_2} + \frac{-v_{n_2}\Delta x_{n_2} + \sqrt{v_{n_2}^2(\Delta x_{n_2})^2 + 2q_2\Delta v_{n_2}\Delta x_{n_2}}}{\Delta v_{n_2}} \tag{56}$$

и выходим из алгоритма. В противном случае полагаем $n_2 := n_2 + 1$ и переходим на шаг 2.

4.5. Основные методы моделирования полиномиальных плотностей

Рассмотрим случайную величину ξ, имеющую полиномиальное распределение вида

$$f(u) = \sum_{i=0}^{A} a_i u^i, \quad 0 < u < 1, \quad A = N \vee +\infty. \tag{57}$$

Для реализации выборочного значения такой случайной величины используются разные алгоритмы. Так, алгоритм 12 (метод обратной функции распределения) заведомо реализуем для $A = 0$ ($f(u) \equiv 1$, $0 < u < 1$, $\xi = \alpha$), для $A = 1$ $\left(\xi = \frac{-a_0 + \sqrt{a_0^2 + 2a_1\alpha}}{a_1}\right)$, а также для случая $a_i = i + 1$ и $a_j = 0$, $j \neq i$, при этом

$$f(u) = (i+1)u^i \quad \text{и} \quad \xi = \alpha^{\frac{1}{i+1}} = \sqrt[i+1]{\alpha}. \tag{58}$$

В общем случае алгоритм 12 приводит к уравнению $\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i\xi^{i+1}}{i+1} = \alpha$, которое, как правило, неразрешимо относительно ξ.

Пусть все $a_i \geq 0$. Тогда плотность (57) можно представить в виде

$$f(u) = \sum_{i=0}^{A} p_i f_i(u); \quad p_i = \frac{a_i}{i+1}; \quad f_i(u) = (i+1)u^i; \quad \sum_{i=0}^{A} p_i = 1 \qquad (59)$$

и построить следующий метод суперпозиции.

Алгоритм 18 (*метод суперпозиции*)

1. Реализуем выборочное значение α_1 стандартного случайного числа. Согласно вероятностям $\left\{\frac{a_i}{i+1}\right\}$, используя алгоритм 1 или его модификации, выбираем номер m.

2. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ согласно плотности $f_m(u) = (m+1)u^m$ по формуле вида (58): $\xi = \sqrt[m+1]{\alpha_2}$.

В случае наличия отрицательных чисел среди коэффициентов $\{a_i\}$ величины $\{p_i\}$ из соотношения (59) нельзя считать вероятностями, так как они не являются положительными числами (хотя соотношение $\sum\limits_{i=0}^{A} p_i = 1$ выполнено в любом случае). Пусть $A = N < \infty$. Для функции (57) можно построить мажоранту

$$f(u) \leq g_1(u) = \sum_{i=0}^{A} a_i^+ u^i, \qquad (60)$$

где $a_i^+ = a_i$ при $a_i \geq 0$ и $a_i^+ = 0$ при $a_i < 0$.

Алгоритм 19 (*метод исключения*)

1. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ_1, распределенной с плотностью

$$\widetilde{f}_1(u) = \sum_{i=0}^{N} p_i^+ f_i(u), \quad p_i^+ = \frac{a_i^+}{(i+1)\int\limits_0^1 g_1(w)dw} = \frac{a_i^+}{(i+1)\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{a_j^+}{j+1}},$$

согласно алгоритму 18 (при этом используются два стандартных числа α_1 и α_2).

2. Реализуем также значение $\eta = \alpha_3 g_1(\xi_1)$.

3. Если $\eta < f(\xi_1)$, то полагаем $\xi = \xi_1$ и выходим из алгоритма. Иначе переходим на шаг 1.

4.6. Основные методы моделирования гамма-распределения

Определение. Случайная величина $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu}$ имеет *гамма-распределение Пирсона*, если ее плотность распределения представима в виде

$$f^{(\gamma)}_{\lambda,\nu}(u) = \frac{\lambda^{\nu} u^{\nu-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\nu)}, \quad u > 0, \quad \lambda > 0, \quad \nu > 0. \tag{61}$$

Здесь $\Gamma(\nu) = \int\limits_{0}^{+\infty} w^{\nu-1} e^{-w} dw$ — гамма-функция.

При $\nu = 1$ соотношение (61) представляет собой плотность *показательного распределения* $f^{(\gamma)}_{\lambda,1} = \lambda e^{-\lambda u}$, $u > 0$, $\lambda > 0$ с моделирующей формулой

$$\xi^{(\gamma)}_{\lambda,1}(u) = -\frac{\ln \alpha}{\lambda}. \tag{62}$$

При $\nu = n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ соотношение (61) называется *распределением Эрланга*. Для $\nu = n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$, а плотность имеет вид

$$f^{(\gamma)}_{\lambda,n}(u) = \frac{\lambda^{n} u^{n-1} e^{-\lambda u}}{(n-1)!}, \quad n > 1. \tag{63}$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{l}{2}$ и $l \in \mathbb{N}$ соотношение (61) является плотностью *χ^2-распределения с l степенями свободы*:

$$f_{\chi^2_l} = f^{(\gamma)}_{\frac{1}{2},\frac{l}{2}}(u) = \frac{u^{\frac{l}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{l}{2}} \Gamma(\frac{l}{2})}. \tag{64}$$

Лемма 8. *Если случайные величины $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu}$ и $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\mu}$ независимы, то выполнено $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu} + \xi^{(\gamma)}_{\lambda,\mu} = \xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu+\mu}$; равенство означает совпадение распределений соответствующих случайных величин.*

Определение. Распределение случайной величины ζ называется *безгранично делимым*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо представление $\zeta = \zeta^{(n)}_1 + \ldots + \zeta^{(n)}_n$, где $\zeta^{(n)}_j$, $j \in \overline{1,n}$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины.

По индукции из леммы 8 можно получить, что гамма-распределение является безгранично делимым. Поэтому $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu}$ можно представить в виде

$$\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu} = \xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1} + \xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_2}, \tag{65}$$

где $\nu_1 = \lfloor \nu \rfloor$, $\nu_2 = \{\nu\}$.

Для моделирования первого слагаемого (65) можно использовать свойство безграничной делимости гамма-распределения и представить $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1}$ в виде суммы из ν_1 слагаемых:

$$\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1} = \left(\xi^{(\gamma)}_{\lambda,1}\right)^{(\nu_1)}_1 + \ldots + \left(\xi^{(\gamma)}_{\lambda,1}\right)^{(\nu_1)}_{\nu_1}.$$

Согласно соотношению (62) для получения выборочного значения случайной величины $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1}$ можно предложить формулу

$$\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1} = \left(-\frac{\ln\alpha_1}{\lambda}\right) + \ldots + \left(-\frac{\ln\alpha_{\nu_1}}{\lambda}\right) = -\frac{\ln(\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_{\nu_1})}{\lambda}. \qquad (66)$$

Полученное соотношение (66) является моделирующей формулой для распределения Эрланга (63).

Если $l = 2k$, то из соотношений (64), (66) следует, что

$$\chi^2_{2k} = \xi^{(\gamma)}_{\frac{1}{2},k} = -2\ln(\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_k). \qquad (67)$$

Для моделирования выборочного значения второго слагаемого $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_2}$ суммы (65) можно предложить *мажорантный метод исключения*. Заметим, что для функции $g(u) = u^{\nu_2-1}e^{-\lambda u}$, пропорциональной плотности (61), справедливо неравенство

$$g(u) \le g_1(u) = \begin{cases} u^{\nu_2-1}, & 0 < u < 1; \\ e^{-\lambda u}, & u \ge 1. \end{cases}$$

Алгоритм 20 (*моделирование гамма-распределения*)

1. Представляем $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu}$ в виде (65).

2. Для моделирования значения $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1}$ используем формулу (66).

3. Реализуем выборочное значение $\xi_1 = \psi_1(\alpha')$ согласно плотности $f_1(u) = = cg_1(u)$ (несложно определить, что нормирующая константа $c = \frac{\lambda}{\lambda\nu_2^{-1}+e^{-\lambda}}$); здесь

$$\psi_1(\alpha') = \begin{cases} \left(\frac{\alpha'(\lambda+\nu_2 e^{-\lambda})}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu_2}}, & \alpha' \le \frac{\lambda}{\lambda+\nu_2 e^{-\lambda}}; \\ -\frac{1}{\lambda}\ln\left((1-\alpha')\left(e^{-\lambda}+\lambda\nu_2^{-1}\right)\right), & \alpha' > \frac{\lambda}{\lambda+\nu_2 e^{-\lambda}}. \end{cases}$$

Вывод этого соотношения приведен в примере 8.

4. Реализуем значение $\eta = \alpha'' g_1(\xi_1)$.

5. Если $\eta < g(\xi_1)$, то полагаем $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_2} = \xi_1$, иначе переходим на шаг 3.

6. Полагаем $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu} = \xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_1} + \xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu_2}$ и выходим из алгоритма.

4.7. Моделирование нормального распределения

Пусть теперь η — случайная величина, имеющая плотность *нормального распределения*

$$f_\eta(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < u < +\infty \tag{68}$$

с параметрами (m, σ): $m = M\eta$, $\sigma^2 = D\eta$. Заметим, что для реализации значений η достаточно моделировать значения *стандартной нормальной случайной величины* ξ с параметрами $(0,1)$ и плотностью распределения

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{69}$$

а затем использовать преобразование $\eta = m + \sigma\xi$.

Лемма 9. *Случайные величины*

$$\xi_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin(2\pi\alpha_2), \quad \xi_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos(2\pi\alpha_2), \tag{70}$$

где (α_1, α_2) — пара независимых случайных чисел, являются независимыми и распределенными согласно плотности (69).

Алгоритм 21 (*моделирование нормального распределения*). Для моделирования $N(m,\sigma)$ моделируем сначала $N(0,1)$ по формулам (70), а затем выполняем преобразование $\eta_i = m + \sigma\xi_i$, где $\xi_i \in N(0,1)$, $\eta_i \in N(m,\sigma)$, $i = 1, 2$.

5. Численное интегрирование

Пусть требуется приближенно вычислить l-кратный интеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^l} g(x)dx = \int g(x)dx. \tag{71}$$

Здесь $dx = dx_1 \dots dx_l$, то есть вычисляется интеграл Римана. Во многих случаях интеграл (71) удобнее записывать в виде $I = \int\limits_X g(x)dx$, где X — замыкание множества тех $x \in \mathbb{R}^l$, для которых $g(x) \neq 0$.

Выберем такую плотность распределения $f(x)$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \in \mathbb{R}^l$, что

$$f(x) \geq 0; \quad \int f(x)dx = 1 \quad \text{и} \quad f(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^l.$$

Перепишем интеграл (71) в виде математического ожидания:

$$I = \int g(x)dx = \int q(x)f(x)dx = M\zeta, \quad q(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad \zeta = q(\xi). \tag{72}$$

На основании закона больших чисел строится алгоритм.

Алгоритм 22 (*стандартный алгоритм метода Монте-Карло для вычисления интеграла (71)*)

1. Реализуем n выборочных значений $\xi_1, \dots, \xi_n$ случайного вектора ξ согласно выбранной плотности $f(x)$.

2. Вычисляем приближенное значение интеграла (71):

$$I \approx \bar{\zeta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \zeta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(\xi_i). \tag{73}$$

Следует отметить, что скорость сходимости стандартного метода Монте-Карло определяется величиной $n^{-\frac{1}{2}}$, то есть относительно невелика. Для одномерных интегралов скорость сходимости методов, основанных на квадратурных формулах Ньютона–Котеса, оказывается существенно выше, чем у методов Монте-Карло. Тем не менее скорость сходимости $n^{-\frac{1}{2}}$ метода Монте-Карло не зависит от размерности пространства l, поэтому при больших l методы Монте-Карло будут более эффективны.

6. Задание и варианты лабораторной работы № 1

ОБЩЕЕ ЗАДАНИЕ

Для данного дискретного распределения выполнить моделирование случайной величины с использованием генератора стандартного случайного числа α (мультипликативный метод вычетов) и указанного алгоритма для дискретного распределения.

В мультипликативном методе вычетов следует использовать начальный элемент последовательности $a_0 = 2^{-m}$ и множитель $K = 5^{2p+1}$. Значения m и p следует выбирать таким образом, чтобы величина периода $L = 2^{m-2}$ была, по крайней мере, в 2 раза больше размера выборки (например, для выборки размерности $n \leq 10^9$ подходит генератор с $m = 40$ и $p = 8$).

Индекс t первого используемого элемента последовательности $\{\alpha_i\}$ нужно выбирать, основываясь на некотором заранее не фиксированном значении (например, на количестве тиков), с тем чтобы различные наборы испытаний давали различные результаты. Также в целях получения по возможности менее коррелирующих значений следует определить шаг s для используемых значений генератора α (то есть использовать при моделировании значения $\alpha_t,\ \alpha_{t+s},\ \alpha_{t+2s},\ \ldots,\ \alpha_{t+(n-1)s}$).

ВАРИАНТ 1

Алгоритм:

Стандартный алгоритм для геометрического распределения с параметром p.

Входные данные:

p — параметр геометрического распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по геометрическому закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 2

Алгоритм:

Стандартный алгоритм для биномиального распределения с параметрами p и N.

Входные данные:

p — параметр биномиального распределения;

N — количество испытаний Бернулли γ_i ($\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины $\eta_{p,N}$, распределенной по биномиальному закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 3

Алгоритм:

Стандартный алгоритм для распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$.

Входные данные:

λ — параметр распределения Пуассона;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по закону Пуассона, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 4

Алгоритм:

Специальный алгоритм моделирования геометрического распределения с параметром p (алгоритм 9).

Входные данные:

p — параметр геометрического распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по геометрическому закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 5

Алгоритм:

Метод браковки для моделирования геометрического распределения с параметром p (алгоритм 10).

Входные данные:

p — параметр геометрического распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по геометрическому закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 6

Алгоритм:

Специальный алгоритм моделирования распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$ (алгоритм 11).

Входные данные:

λ — параметр распределения Пуассона;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по закону Пуассона, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 7

Алгоритм:

Метод приведения вероятностей к общему знаменателю для распределения, заданного таблицей.

Входные данные:

N — количество значений $\{x_i\}$ случайной величины ξ;

$x_1, \ldots, x_N$ — значения случайной величины ξ;

$p_1, \ldots, p_N$ — вероятности соответствующих значений x_i ($\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$; $p_i > 0$ для всех i); p_i представляются как простые дроби;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_m случайной величины ξ с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — номер i значения x_i случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 8

Алгоритм:

Метод Уолкера перераспределения вероятностей для распределения, заданного таблицей.

Входные данные:

N — количество значений $\{x_i\}$ случайной величины ξ;

$x_1, \ldots, x_N$ — значения случайной величины ξ;

$p_1, \ldots, p_N$ — вероятности соответствующих значений x_i ($\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$; $p_i > 0$ для всех i);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_m случайной величины ξ с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — номер i значения x_i случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 9

Алгоритм:

Квантильный метод для распределения, заданного таблицей.

Входные данные:

N — количество значений $\{x_i\}$ случайной величины ξ;

$x_1, \ldots, x_N$ — значения случайной величины ξ;

$p_1, \ldots, p_N$ — вероятности соответствующих значений x_i ($\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$; $p_i > 0$ для всех i);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_m случайной величины ξ с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — номер i значения x_i случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 10

Алгоритм:

Метод бинарного поиска для распределения, заданного таблицей.

Входные данные:

N — количество значений $\{x_i\}$ случайной величины ξ;

$x_1, \ldots, x_N$ — значения случайной величины ξ;

$p_1, \ldots, p_N$ — вероятности соответствующих значений x_i ($\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$; $p_i > 0$ для всех i);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_m случайной величины ξ с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — номер i значения x_i случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 11

Алгоритм:

Метод приведения вероятностей к общему знаменателю для биномиального распределения с параметрами p и N.

Входные данные:

p — параметр биномиального распределения;

N — количество испытаний Бернулли γ_i ($\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины $\eta_{p,N}$, распределенной по биномиальному закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 12

Алгоритм:

Квантильный метод для геометрического распределения с параметром p.

Входные данные:

p — параметр геометрического распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по геометрическому закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 13

Алгоритм:

Метод Уолкера перераспределения вероятностей для биномиального распределения с параметрами p и N.

Входные данные:

p — параметр биномиального распределения;

N — количество испытаний Бернулли γ_i ($\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины $\eta_{p,N}$, распределенной по биномиальному закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 14

Алгоритм:

Квантильный метод для распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$.

Входные данные:

λ — параметр распределения Пуассона;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по закону Пуассона, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 15

Алгоритм:

Квантильный метод для биномиального распределения с параметрами p и N.

Входные данные:

p — параметр биномиального распределения;

N — количество испытаний Бернулли γ_i ($\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины $\eta_{p,N}$, распределенной по биномиальному закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 16

Алгоритм:

Метод бинарного поиска для биномиального распределения с параметрами p и N.

Входные данные:

p — параметр биномиального распределения;

N — количество испытаний Бернулли γ_i ($\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины $\eta_{p,N}$, распределенной по биномиальному закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 17

Алгоритм:

Метод «мажорантной частоты» для распределения, заданного таблицей.

Входные данные:

N — количество значений $\{x_i\}$ случайной величины ξ;

$x_1, \ldots, x_N$ — значения случайной величины ξ;

$p_1, \ldots, p_N$ — вероятности соответствующих значений x_i ($\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$; $p_i > 0$ для всех i);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_m случайной величины ξ с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — номер i значения x_i случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 18

Алгоритм:

Метод «мажорантной частоты» для биномиального распределения с параметрами p и N.

Входные данные:

p — параметр биномиального распределения;

N — количество испытаний Бернулли γ_i ($\eta_{p,N} = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$);

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины $\eta_{p,N}$, распределенной по биномиальному закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 19

Алгоритм:

Метод «мажорантной частоты» для геометрического распределения с параметром p.

Входные данные:

p — параметр геометрического распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по геометрическому закону, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

ВАРИАНТ 20

Алгоритм:

Метод «мажорантной частоты» для распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$.

Входные данные:

λ — параметр распределения Пуассона;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_m случайной величины η, распределенной по закону Пуассона, с указанием вероятности каждого значения.

График частоты выборочных значений: по оси абсцисс — значение случайной величины, по оси ординат — частота (количество таких значений в выборке).

7. Задание и варианты лабораторной работы № 2

ОБЩЕЕ ЗАДАНИЕ

Для данного непрерывного распределения выполнить моделирование случайной величины с использованием генератора стандартного случайного числа α (мультипликативный метод вычетов), полученного в лабораторной работе № 1, и указанного алгоритма для непрерывного распределения.

В вариантах с полиномиальными, кусочно-линейными и кусочно-постоянными плотностями необходимо предусмотреть нормирующие константы для функции плотности, которые бы обеспечивали выполнение равенства $\int\limits_a^b f(u)du = 1$.

ВАРИАНТ 1

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом суперпозиции (алгоритм 18).

Входные данные:

$A \leq 20$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(a_i \geq 0;\ \sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 2

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом исключения (алгоритм 19).

Входные данные:

$A \leq 20$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 3

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом суперпозиции (алгоритм 18). Коэффициенты полинома с нечетными номерами равны нулю.

Входные данные:

$A \leq 40$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(a_i \geq 0;\ \sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 4

Алгоритм:

Моделирование гамма-распределения Пирсона с параметрами λ, ν.

Входные данные:

$\lambda > 0$, $\nu > 0$ — параметры гамма-распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины $\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)}$, имеющей гамма-распределение, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения в случае натурального ν.

ВАРИАНТ 5

Алгоритм:

Моделирование распределения χ^2 с l степенями свободы.

Входные данные:

$l \in \mathbb{N}$ — количество степеней свободы;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины χ^2_l, имеющей распределение хи-квадрат, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения в случае $l = 2k$.

ВАРИАНТ 6

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом исключения (алгоритм 19). Коэффициенты полинома с четными номерами равны нулю.

Входные данные:

$A \leq 41$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 7

Алгоритм:

Моделирование распределения с кусочно-линейной плотностью (алгоритм 17).

Входные данные:

N — количество интервалов;

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ — границы интервалов;

$v_0, v_1, \ldots, v_N$ — параметры разбиения $\left(v_i \geq 0;\ \int\limits_{(a,b)} f(u)du = 1 \right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей кусочно-линейную плотность, и номеров соответствующих полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j)$, отсортированная по возрастанию номера полуинтервала, а затем по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 8

Алгоритм:

Моделирование распределения с кусочно-постоянной плотностью (алгоритм 16).

Входные данные:

N — количество интервалов;

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ — границы интервалов;

$v_0, v_1, \ldots, v_N$ — параметры разбиения $\left(v_i > 0;\ \int\limits_{(a,b)} f(u)du = 1 \right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей кусочно-постоянную плотность, и номеров соответствующих полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j)$, отсортированная по возрастанию номера полуинтервала.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 9

Алгоритм:

Моделирование нормального распределения $N(m, \sigma)$ (алгоритм 21).

Входные данные:

m; $\sigma > 0$ — параметры нормального распределения;

$n = 2k$ — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_i случайной величины $\eta \in N(m, \sigma)$, отсортированная по возрастанию η_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 10

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом суперпозиции (алгоритм 18). Коэффициенты полинома с четными номерами равны нулю.

Входные данные:

$A \leq 41$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(a_i \geq 0;\ \sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 11

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом исключения (алгоритм 19). Коэффициенты полинома с нечетными номерами равны нулю.

Входные данные:

$A \leq 40$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 12

Алгоритм:

Моделирование нормального распределения $N(m, \sigma)$ (алгоритм 21).

Входные данные:

m; $\sigma > 0$ — параметры нормального распределения;

$n = 2k$ — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений η_i случайной величины $\eta \in N(m, \sigma)$, отсортированная по возрастанию η_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 13

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом суперпозиции (алгоритм 18).

Входные данные:

$A \leq 15$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(a_i \geq 0;\ \sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 14

Алгоритм:

Моделирование распределения с кусочно-постоянной плотностью (алгоритм 16).

Входные данные:

N — количество интервалов;

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ — границы интервалов;

$v_0, v_1, \ldots, v_N$ — параметры разбиения $\left(v_i > 0;\ \int\limits_{(a,b)} f(u)du = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей кусочно-постоянную плотность, и номеров соответствующих полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j)$, отсортированная по возрастанию номера полуинтервала.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 15

Алгоритм:

Моделирование распределения с кусочно-линейной плотностью (алгоритм 17).

Входные данные:

N — количество интервалов;

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ — границы интервалов;

$v_0, v_1, \ldots, v_N$ — параметры разбиения $\left(v_i \geq 0;\ \int\limits_{(a,b)} f(u)du = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей кусочно-линейную плотность, и номеров соответствующих полуинтервалов $[x_{j-1}, x_j)$, отсортированная по возрастанию номера полуинтервала, а затем по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 16

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом исключения (алгоритм 19).

Входные данные:

$A \le 15$ — степень полинома;

$a_0, \ldots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 17

Алгоритм:

Моделирование гамма-распределения Пирсона с параметрами λ, ν.

Входные данные:

$\lambda > 0$, $\nu > 0$ — параметры гамма-распределения;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины $\xi^{(\gamma)}_{\lambda,\nu}$, имеющей гамма-распределение, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения в случае натурального ν.

ВАРИАНТ 18

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом исключения (алгоритм 19). Коэффициенты полинома с четными номерами равны нулю.

Входные данные:

$A \le 31$ — степень полинома;

$a_0, \dots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;
n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

ВАРИАНТ 19

Алгоритм:

Моделирование распределения χ^2 с l степенями свободы.

Входные данные:

$l \in \mathbb{N}$ — количество степеней свободы;

n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины χ^2_l, имеющей распределение хи-квадрат, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения в случае $l = 2k$.

ВАРИАНТ 20

Алгоритм:

Моделирование распределения с полиномиальной плотностью методом исключения (алгоритм 19). Коэффициенты полинома с нечетными номерами равны нулю.

Входные данные:

$A \leq 30$ — степень полинома;

$a_0, \dots, a_A$ — коэффициенты полинома $\left(\sum\limits_{i=0}^{A} \frac{a_i}{i+1} = 1\right)$;
n — количество испытаний.

Выходные данные:

Таблица выборочных значений ξ_i случайной величины ξ, имеющей полиномиальную плотность, отсортированная по возрастанию ξ_i.

График функции плотности распределения.

8. Задание для лабораторной работы № 3

С помощью стандартного метода Монте-Карло найти приближенное значение интеграла

$$I = \int\limits_X g(x)dx = \int\limits_X q(x)f(x)dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения из лабораторной работы № 2, X — интервал, на котором $f(x) > 0$, $q(x)$ — функция одного из трех типов:

1) $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$;

2) $q(x) = a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + a_2 \sin(2x) + b_2 \cos(2x) + ... + a_m \sin(mx) + + b_m \cos(mx)$;

3) $q(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + ... + a_m e^{mx}$.

Входные данные:

— параметры плотности распределения $f(x)$;

— тип функции $q(x)$;

— параметры функции $q(x)$.

Выходные данные:

Значения интеграла I для количества испытаний $n = 10$, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000.

График подынтегральной функции $g(x) = q(x)f(x)$ (в варианте с гамма-распределением график следует строить только для натуральных ν, а в варианте с распределением χ_l^2 — только для четных l).

9. Список вопросов для подготовки к экзамену

1. Основные свойства стандартного случайного числа.

2. Два типа генераторов стандартных случайных чисел. Мультипликативный метод вычетов.

3. Стандартный алгоритм моделирования дискретного распределения. Трудоемкость стандартного алгоритма.

4. Стандартный алгоритм моделирования дискретного распределения в случаях малого и бесконечного числа значений. Примеры.

5. Моделирование равномерного дискретного распределения. Приведение вероятностей к общему знаменателю. Квантильный метод.

6. Перераспределение вероятностей (метод Уолкера).

7. Бинарный поиск. Метод «мажорантной частоты». Специальные методы моделирования геометрического и пуассоновского распределений.

8. Метод обратной функции распределения моделирования непрерывной случайной величины.

9. Метод обратной функции распределения в случае составной плотности (состоящей из двух частей).

10. Метод дискретной суперпозиции.

11. Метод суперпозиции для составных плотностей.

12. Моделирование кусочно-постоянной и кусочно-линейной плотностей.

13. Основные методы моделирования полиномиальных плотностей.

14. Основные алгоритмы моделирования гамма-распределения.

15. Моделирование нормального распределения.

16. Стандартный метод Монте-Карло численного интегрирования.

17. Погрешность и трудоемкость стандартного метода Монте-Карло.

10. Рекомендуемая литература

1. Михайлов, Г. А. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учеб. пособие / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. — М.: Академия, 2006.

2. Самарский, А. А. Математическое моделирование: идеи, методы, примеры; 2-е изд., испр. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М.: Физматлит, 2005.

3. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / В. Н. Ашихмин и др. — М.: Логос, 2005.

Учебное издание

Смирнов Александр Валерьевич

Компьютерное моделирование

Практикум

Редактор, корректор М. Э. Левакова
Компьютерная верстка А. В. Смирнов

Подписано в печать 25.03.2015. Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,0.
Тираж 30 экз. Заказ №

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14