

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра общей математики

**И. П. Иродова**

# **АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ**

*Учебно-методическое пособие*

Ярославль  
ЯрГУ  
2019

УДК 517.518(075.8)  
ББК В161.5я73  
И83

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2019 года*

Рецензенты:  
кафедра общей математики  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

**Иродова, Ирина Павловна.**

И83 Алгоритмы теории приближения : учебно-методическое пособие /  
И. П. Иродова ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль :  
ЯрГУ, 2019.— 40 с.

В пособии описаны алгоритмы приближения функций многочленами. Рассматриваются задачи интерполяции и нахождения многочлена наилучшего приближения. Аппроксимация осуществляется в пространстве непрерывных функций и гильбертовом пространстве. Приводится большое количество задач, которые помогают оценить достоинства и недостатки описанных алгоритмов.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине «Алгоритмы теории приближения».

Библиогр.: 11 назв.

© ЯрГУ, 2019

# Оглавление

1.	Введение . . . . .	4
2.	Многочленная интерполяция . . . . .	5
3.	Выбор узлов интерполяции . . . . .	6
4.	Чебышевская форма интерполяционного многочлена . . . . .	8
5.	Кратная полиномиальная интерполяция . . . . .	9
6.	Вычисление производных интерполяционного многочлена в форме Ньютона. Алгоритм гнездового перемножения . . . . .	12
7.	Алгоритм Ремеза . . . . .	15
8.	Модификация алгоритма Ремеза . . . . .	20
9.	Алгоритм Ремеза с интерполированием . . . . .	22
10.	Метод наименьших квадратов . . . . .	25
11.	Приближение ортогональными многочленами . . . . .	27
12.	Приближение тригонометрическими многочленами. Алгоритм быстрого преобразования Фурье . . . . .	31
13.	Приближение кусочно-полиномиальными функциями . . . . .	35
14.	Алгоритм склейки . . . . .	37

# 1. Введение

Теории приближения, одному из разделов функционального анализа, посвящено немало книг и статей. В них подробно рассматриваются задачи существования и единственности элемента наилучшего приближения и даются ответы на вопросы, что является объектом приближения, как выбрать аппарат приближения, зачем, где и как приближать функции.

Кроме классической теории приближения, можно выделить направление прикладной теории приближения, где акцент сделан на применении методов теории приближения. Здесь можно отметить монографию К. Де Бора [1] и пособие Ю. А. Брудного, И. П. Иродовой [2], которые явились основой для написания данного пособия.

В пособии мы будем подробно изучать методы приближения функции алгебраическими и тригонометрическими многочленами, оценивать их трудоемкость, сравнивать различные алгоритмы приближения, анализировать полученные результаты. В пособии нет строгих математических доказательств, но есть ссылки на книги, где эти доказательства можно найти.

Как было сказано выше, мы будем приближать функции многочленами. Укажем причины столь частого использования многочленов на практике.

Во-первых, простота вычислений значений многочлена.

Во-вторых, иногда это связано с реальными физическими процессами, которые описывает приближаемая функция. Например, если эксперимент не зависит от начала отсчета и единицы измерений, то есть  $f$  инвариантна относительно сдвигов и растяжений, то конечномерное пространство обладает этими двумя свойствами тогда и только тогда, когда это пространство – пространство алгебраических многочленов.

В-третьих, пространство многочленов является подпространством сплайнов и еще более широкого пространства кусочно-полиномиальных функций.

В-четвертых (как утверждает теорема Вейерштрасса), любую непрерывную функцию, заданную на отрезке, с любой точностью можно приблизить многочленом.

Приведем примеры приближения функций многочленами (см. [3]).

1. Если  $x \in [0, \ln 2]$ , то  $e^x = 1 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon(x)$ ,  $|\varepsilon(x)| \leq 3 \cdot 10^{-3}$ ;  $a_1 = -0.9664$ ,  $a_2 = 0.3536$ .

2. Если  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , то  $\frac{\sin x}{x} = 1 + a_1x + a_4x^4 + \varepsilon(x)$ ,  $|\varepsilon(x)| \leq 2 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_1 = 0.16605$ ,  $a_4 = 0.00761$ .

3. Если  $x \in [-1, 1]$ , то  $\operatorname{arctg} x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + a_9x^9 + \varepsilon(x)$ ,  $|\varepsilon(x)| \leq 10^{-5}$ .

Несмотря на очевидные достоинства, способ приближения многочленами обладает и рядом недостатков. Так, приближать многочленами имеет

смысл только гладкие функции. Функция  $f(x) = |x|$  является примером этого утверждения. Для того, чтобы получить хорошее приближение этой функции, нужно взять многочлен достаточно большой степени. Но с ростом  $n$  увеличивается вычислительная погрешность. Кроме того, многочленами плохо приближать функции на отрезках большой длины. Приведем пример вычисления  $\sin x$  с помощью ряда Тейлора. Если программу составить так, что вычисление  $\sin x$  производить путем прибавления новых членов ряда, пока не достигнем нужной точности  $\varepsilon$ , то получим большую абсолютную погрешность для больших значений  $x$ . Например, для  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $x = 1830^\circ$  она равна  $14 \cdot 10^3$ , хотя известно, что ряд Тейлора для  $\sin x$  сходится при любых значениях аргумента.

Перейдем к описанию конкретных алгоритмов.

## 2. Многочленная интерполяция

Обозначим через  $\mathcal{P}_n$  пространство алгебраических многочленов степени не выше  $n$ :

$$\mathcal{P}_n = \{p : p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in R\}.$$

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $f$  и пусть  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  последовательность различных точек, которые мы будем называть узлами интерполяции. Требуется найти многочлен  $p \in \mathcal{P}_n$ , который совпадает с функцией  $f$  в узлах интерполяции, то есть

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Известно (см., например, [4]), что существует единственный многочлен из пространства  $\mathcal{P}_n$ , обладающий этим свойством. Приведем две формы интерполяционного многочлена. Форма Лагранжа имеет вид:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (2)$$

Для определения формы Ньютона нужно напомнить, как задается раздельная разность:

$$f(x_i, \dots, x_j) := \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_j) - f(x_i, \dots, x_{j-1})}{x_j - x_i}.$$

Тогда интерполяционный многочлен в форме Ньютона имеет вид:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot f(x_0, \dots, x_i). \quad (3)$$

Для вычисления коэффициентов многочлена (3) удобно использовать специальную таблицу разделенных разностей.

**Задача 1.** Найти трудоемкость вычисления формы Лагранжа (2) в точке. Как это можно сделать за  $(2n - 1)A + 2nM$  операций? Здесь через  $A$  обозначили операцию сложения или вычитания, а через  $M$  – умножения или деления.

**Задача 2.** Сравнить трудоемкость вычисления формы Лагранжа (2) и формы Ньютона (3). Показать, что для вычисления формы Ньютона потребуется  $(2n - 2)A + (n - 1)M$  операций.

**Задача 3.** Написать программу приближения функции с заданной точностью, используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и Ньютона. В качестве узлов интерполяции взять равномерное разбиение отрезка  $[a, b]$ . На конкретных примерах сравнить время выполнения программ.

**Задача 4.** Проанализировать, как меняется погрешность интерполяции при увеличении длины отрезка  $[a, b]$ .

**Задача 5.** Приблизить функцию Рунге  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 25}$  и функцию  $f(x) = \sqrt{|x|}$  на отрезке  $[-1, 1]$  многочленами с равномерно распределенными узлами интерполяции. Как меняется погрешность приближения с увеличением степени приближающего многочлена?

### 3. Выбор узлов интерполяции

Для нахождения интерполяционного многочлена нужно знать узлы интерполяции. Если неправильно выбрать узлы, то погрешность интерполяции может увеличиваться с ростом степени приближающего многочлена (см. задачу 5). Напомним теорему о погрешности приближения интерполяционным многочленом.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^{n+1}[a, b]$ , тогда

$$|f(x) - P_n f(x)| \leq |x - x_0| \cdot \dots \cdot |x - x_n| \cdot \frac{\|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]}}{(n+1)!},$$

где  $P_n f$  – интерполяционный многочлен, построенный по узлам  $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$ .

Доказательство теоремы можно найти, например, в [4].

Чтобы уменьшить погрешность интерполяции, нужно так выбрать узлы, чтобы норма многочлена  $(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  была как можно меньше. Известно, что таким свойством обладают многочлены Чебышева  $T_n$ :

$$T_n(x) = \frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}}, \quad |x| \leq 1.$$

Итак, имеем следующий алгоритм построения интерполяционного многочлена с заданной точностью  $\varepsilon$ .

**1-й шаг.** Найдем нули многочлена Чебышева:

$$T_{n+1}(t) = \cos(n+1) \arccos t, \quad |t| \leq 1.$$

Все они различны, лежат на отрезке  $[-1, 1]$  и задаются формулой

$$t_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (4)$$

**2-й шаг.** С помощью линейной замены

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1, 1]$$

”перенесем” узлы с отрезка  $[-1, 1]$  на отрезок  $[a, b]$ . Получим узлы интерполяции:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k, \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (5)$$

**3-й шаг.** Найдем интерполяционный многочлен в форме Лагранжа или в форме Ньютона по узлам  $\{x_k, \quad k = 1, \dots, n+1\}$ .

**4-й шаг.** Будем увеличивать степень многочлена до тех пор, пока не достигнем нужной точности:

$$\|f - P_n^* f\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

$P_n^* f$  – искомый интерполяционный многочлен.

**Задача 6.** Доказать, что погрешность интерполяции с узлами в нулях многочлена Чебышева можно оценить следующим образом:

$$\|f - P_n f\| \leq 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \frac{\|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]}}{(n+1)!}.$$

**Задача 7.** Написать программу, реализующую описанный выше алгоритм. Протестировать на различных гладких функциях. Сравнить результаты приближения с интерполяцией по равномерным узлам (задача 3).

**Задача 8.** Приблизить функции  $f(x) = |x|$  и  $f(x) = \frac{1}{25 + x^2}$  на отрезке  $[-1, 1]$ , используя интерполяцию в нулях многочлена Чебышева. Сравнить с результатами задачи 5.

## 4. Чебышевская форма интерполяционного многочлена

Интерполяционные многочлены в форме Ньютона и Лагранжа плохо приспособлены для приближения на отрезках большой длины. Погрешность округления можно уменьшить, используя чебышевскую форму интерполяционного многочлена (см. [1]). Для определения этой формы отметим, что многочлены Чебышева  $T_0, \dots, T_n$  ортогональны по дискретному скалярному произведению

$$(\varphi, g) := \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(t_k)g(t_k), \quad (6)$$

где  $\{t_k, \quad k = 1, \dots, n+1\}$  – нули многочлена  $T_{n+1}$  (см. (4)).

Кроме того, что  $(T_i, T_j) = 0$  при  $i \neq j$ , можно доказать, что  $(T_0, T_0) = n+1$  и  $(T_i, T_i) = \frac{n+1}{2}, \quad i = 1, \dots, n$ .

Пусть  $P_n f$  – интерполяционный многочлен, который построен по узлам  $\{x_k, \quad k = 1, \dots, n+1\}$ , где  $\{x_k\}$  – точки Чебышева отрезка  $[a, b]$  (см. формулу (5)). Введем функцию  $y(x) = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$ , которая переводит отрезок  $[a, b]$  в отрезок  $[-1, 1]$ . Тогда (см. (5))  $y(x_k) = t_k$ . Многочлены Чебышева  $T_0, \dots, T_n$  образуют базис в пространстве  $\mathcal{P}_n$ , значит,

$$P_n f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i(y(x)), \quad x \in [a, b]. \quad (7)$$

Взяв скалярное произведение по многочлену  $T_j, \quad j = 0, \dots, n$ , учитывая ортогональность многочленов, получим

$$\alpha_j = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) T_j(t_k)}{(T_j, T_j)}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (8)$$

Таким образом, формулы (7), (8) задают чебышевскую форму интерполяционного многочлена, который совпадает со значениями функции  $f$  в точках  $x_k$ .

**Задача 9.** Доказать ортогональность многочленов  $T_0, \dots, T_n$  относительно скалярного произведения (6).

**Задача 10.** Написать программу приближения функции с заданной точностью, используя чебышевскую форму интерполяционного многочлена. Протестировать на непрерывных функциях. Сравнить результаты приближения с результатами задачи 7.

## 5. Кратная полиномиальная интерполяция

Рассмотрим такую задачу. На отрезке  $[a, b]$  заданы значения функции  $f$  в точках  $x_1$  и  $x_2$  и производная функции  $f$  в точке  $x_1$ . Требуется по этим значениям построить многочлен  $p_2$  такой, что  $p_2(x_1) = f(x_1)$ ,  $p_2(x_2) = f(x_2)$ ,  $p_2'(x_1) = f'(x_1)$ . Поступим следующим образом. Введем новую точку  $x_1 + \varepsilon$ ;  $\varepsilon$  выбираем так, чтобы  $a \leq x_1 < x_1 + \varepsilon < x_2 \leq b$ . По трем точкам строим интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$P_2^\varepsilon f(x) = f(x_1) + f(x_1, x_1 + \varepsilon)(x - x_1) + f(x_1, x_1 + \varepsilon, x_2)(x - x_1)(x - (x_1 + \varepsilon)), \quad (9)$$

где  $f(x_1, x_1 + \varepsilon) = \frac{f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1)}{\varepsilon}$

и

$$f(x_1, x_1 + \varepsilon, x_2) = \frac{f(x_1 + \varepsilon, x_2) - f(x_1, x_1 + \varepsilon)}{x_2 - x_1}.$$

Теперь в (9) перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получим

$$f(x_1, x_1) = f'(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_1, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Искомый интерполяционный многочлен имеет вид:

$$p_2 = P_2 f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1, x_1, x_2)(x - x_1)^2.$$

Мы рассмотрели простейший пример кратной интерполяции. Кратной она называется потому, что точка  $x_1$  повторяется два раза: известны  $f(x_1)$  и  $f'(x_1)$ .

Перейдем к общей постановке задачи (см. [1]). Будем говорить, что точка  $x_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ) имеет кратность  $k_i$ , если в последовательности  $\xi$  она встречается  $k_i$  раз, то есть

$$\xi = \underbrace{\{x_0, \dots, x_0\}}_{k_0}, \underbrace{\{x_1, \dots, x_1\}}_{k_1}, \dots, \underbrace{\{x_N, \dots, x_N\}}_{k_N}.$$

**Определение 1.** Многочлен  $P_n f$  называется интерполяционным многочленом функции  $f$ , построенным по последовательности  $\xi$ , если

$$f^{(l)}(x_i) = (P_n f)^{(l)}(x_i), \quad l = 0, \dots, k_i - 1;$$

здесь  $k_0 + k_1 + \dots + k_N = n + 1$ .

В частности, если  $k_i = 1, i = 0, \dots, N$ , то  $N = n$ , и мы получаем классическое определение интерполяционного многочлена. Если же  $N = 0$ , то последовательность  $\xi$  содержит  $n + 1$  раз повторяющуюся точку  $x_0$ . Тогда  $f^{(l)}(x_0) = (P_n f)^{(l)}(x_0), l = 0, \dots, n$ , и интерполяционный многочлен – это многочлен Тейлора:

$$P_n f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Для нахождения интерполяционного многочлена в общем случае нужно определить разделенную разность совпадающих узлов:

$$f(\underbrace{x, \dots, x}_{k+1}) := \frac{f^{(k)}(x)}{k!}. \quad (10)$$

Тогда интерполяционный многочлен  $P_n f$  можно найти, используя форму Ньютона (3).

Покажем, как найти интерполяционный многочлен, если  $\xi = (x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$ . У нас 5 узлов, значит, получим интерполяционный многочлен

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^3(x - x_1).$$

Чтобы найти коэффициенты многочлена, нужно знать  $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f(x_1), f'(x_1)$ . Составим таблицу разделенных разностей.

## Разделенные разности

$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$	
$x_0$	$f(x_0) \searrow$	$f'(x_0) \searrow$			
$x_0$	$f(x_0) \swarrow \searrow$		$\frac{f''(x_0)}{2!} \searrow$		
$x_0$	$f(x_0) \swarrow \searrow$	$f'(x_0) \swarrow \searrow$		$\frac{\alpha - f'' \frac{(x_0)}{2}}{x_1 - x_0} = \alpha_1 \searrow$	
$x_0$	$f(x_0) \swarrow \searrow$		$\frac{f(x_0, x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} = \alpha \swarrow \searrow$		$\frac{\beta_1 - \alpha_1}{x_1 - x_0}$
$x_0$		$f(x_0, x_1) \swarrow \searrow$		$\frac{\beta - \alpha}{x_1 - x_0} = \beta_1 \swarrow$	
$x_1$	$f(x_1) \swarrow \searrow$		$\frac{f'(x_1) - f(x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = \beta \swarrow$		
$x_1$	$f(x_1) \swarrow \searrow$	$f'(x_1) \swarrow$			

При составлении таблицы использовали (10).

Тогда  $a_0 = f(x_0)$ ;  $a_1 = f'(x_0)$ ;  $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$ ;  $a_3 = \alpha_1$ ;  $a_4 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{x_1 - x_0}$ .

**Задача 11.** Для функции  $f(x) = \sqrt{x}$  и последовательности  $\xi = (1, 1, 4, 4, 9)$  построить интерполяционный многочлен. Найти погрешность приближения на отрезке  $[1, 9]$ .

**Задача 12.** Для функции  $f(x) = \ln x$  оценить  $f(1,5)$  с помощью  $P_3 f(1,5)$ , где  $P_3 f$  – кубический интерполяционный многочлен, построенный по последовательности  $\xi = (1, 1, e, e)$ .

## 6. Вычисление производных интерполяционного многочлена в форме Ньютона.

### Алгоритм гнездового перемножения

Пусть даны значения функции  $f$  в различных точках  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Нужно приближенно вычислить производные функции  $f$  в точке  $x^* \in [a, b]$ .

Для решения этой задачи построим интерполяционный многочлен  $P_n f$  в форме Ньютона по узлам  $\{x_i, \quad i = 0, \dots, n\}$ . Тогда

$$f^{(k)}(x^*) \approx (P_n f)^{(k)}(x^*), \quad k = 0, \dots, n.$$

Таким образом, нужно найти все производные многочлена  $P_n f$ . Самый простой путь – разложить  $P_n f$  в ряд Тейлора в точке  $x^*$ :

$$P_n f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - x^*)^k, \quad (11)$$

тогда  $(P_n f)^{(k)}(x^*) = \alpha_k \cdot k!$ .

Итак, наша задача свелась к тому, что интерполяционный многочлен в форме Ньютона (3) мы должны записать в форме (11), то есть заменить узлы  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  на кратные узлы  $\{\underbrace{x^*, \dots, x^*}_n, x_0\}$ . Для этого применим алгоритм гнездового перемножения (см. [1]). Приведем описание этого алгоритма.

Пусть  $P_n f(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) a_i$  (см. (3)) и  $x^* \in [a, b]$ . Вычислим числа  $\{b_i, \quad i = 0, \dots, n\}$  по формулам:

$$b_n = a_n; \quad b_k := a_k + (x^* - x_k) b_{k+1}, \quad k = n - 1, \dots, 0. \quad (12)$$

Тогда можно доказать, что

$$b_k = P_n f(x^*, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}), \quad k = 0, \dots, n \quad (13)$$

и

$$P_n f(x) = b_0 + (x - x^*) b_1 + (x - x^*)(x - x_0) b_2 + \cdots + (x - x^*)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) b_n.$$

В этом и заключается суть алгоритма гнездового перемножения. Он позволяет заменить узлы  $\{x_0, \dots, x_n\}$  на узлы  $\{x^*, x_0, \dots, x_{n-1}\}$ .

Повторим алгоритм, применив его к узлам  $x^*, x_0, \dots, x_{n-1}$ , коэффициентам  $b_0, \dots, b_n$  и дополнительной точке  $x^*$ . Пересчитаем по формулам (12), заменив  $a_k := b_k$ ,  $b_k := c_k$ . Тогда точки  $\{x^*, x_0, \dots, x_{n-1}\}$  мы заменим на  $\{x^*, x^*, x_0, \dots, x_{n-2}\}$  и  $P_n f$  можно записать в виде:

$$P_n f(x) = c_0 + (x - x^*)c_1 + (x - x^*)^2 c_2 + \dots + (x - x^*)^2 (x - x_0) \dots (x - x_{n-3}) c_n.$$

Для получения формы (11) алгоритм гнездового перемножения нужно повторить  $n$  раз.

**Пример 1.** Дана функция  $f(x) = \sin(x)$  и ее значения в точках  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ;  $x_3 = \frac{3\pi}{4}$ ;  $x_4 = \pi$ . Применяя алгоритм гнездового перемножения, приближенно найти  $f^{(k)}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

**Решение.** Используя таблицу разделенных разностей, найдем интерполяционный многочлен:

$$P_4 f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + a_3 x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ + a_4 x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\text{где } a_0 = 0; a_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}; a_2 = \frac{8(1 - \sqrt{2})}{\pi^2}; a_3 = \frac{32(2\sqrt{2} - 3)}{3\pi^3}; a_4 = \frac{64(3 - 2\sqrt{2})}{3\pi^4}.$$

По формуле (12) пересчитаем коэффициенты многочлена  $P_n f$ , введя новый узел  $x^* = \frac{\pi}{8}jk$ . Получим

$$b_4 = a_4; \quad b_3 = a_3 + \left(\frac{\pi}{8} - x_3\right) \cdot b_4 = \frac{24(2\sqrt{2} - 3)}{\pi^3};$$

$$b_2 = a_2 + \left(\frac{\pi}{8} - x_2\right) \cdot b_3 = \frac{35 - 26\sqrt{2}}{\pi^2};$$

$$b_1 = a_1 + \left(\frac{\pi}{8} - x_1\right) \cdot b_2 = \frac{7(6\sqrt{2} - 5)}{8\pi}; \quad b_0 = a_0 + \left(\frac{\pi}{8} - x_0\right) = \frac{7(6\sqrt{2} - 5)}{64}.$$

Кроме того,

$$P_4 f(x) = b_0 + b_1 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + b_2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot x + \\ + b_3 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot x \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + b_4 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Повторим алгоритм гнездового перемножения. Сейчас  $x_0 = \frac{\pi}{8}$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4}$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{2}$ ;  $x_4 = \frac{3\pi}{4}$ , а новый узел  $x^* = \frac{\pi}{8}$ . Пересчитаем коэффициенты по формуле (12), учитывая, что  $a_k := b_k$ ;  $c_k := b_k$ . Имеем

$$c_4 = b_4; c_3 = b_3 + \left(\frac{\pi}{8} - x_3\right) \cdot c_4 = \frac{32(2\sqrt{2} - 3)}{\pi^3};$$

$$c_2 = b_2 + \left(\frac{\pi}{8} - x_2\right) \cdot c_3 = \frac{47 - 34\sqrt{2}}{\pi^2};$$

$$c_1 = b_1 + \left(\frac{\pi}{8} - x_1\right) \cdot c_2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\pi}; \quad c_0 = b_0.$$

и

$$P_4f(x) = c_0 + c_1 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + c_2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 + \\ + c_3 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 \cdot x + c_4 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 \cdot x \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Опять добавляем узел  $x^* = \frac{\pi}{8}$ . Сейчас  $x_0 = x_1 = \frac{\pi}{8}$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{4}$ ;  $x_4 = \frac{\pi}{2}$ . Последний раз применяем алгоритм гнездового перемножения. Получим

$$P_4f(x) = d_0 + d_1 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + d_2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 + d_3 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^3 + d_4 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^3 \cdot x;$$

где  $d_0 = c_0$ ;  $d_1 = c_1$ ;  $d_2 = \frac{102 - 76\sqrt{2}}{3\pi^2}$ ;  $d_3 = \frac{24(2\sqrt{2} - 3)}{3\pi^3}$ ;  $d_4 = c_4$ .

Учтем, что  $d_k = \frac{(P_4f)^{(k)}\left(\frac{\pi}{8}\right)}{k!}$ . Имеем

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx d_0 = \frac{42\sqrt{2} - 35}{64} \approx 0.378;$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx d_1 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\pi} \approx 0.9235;$$

$$f''\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx d_2 \cdot 2 = \frac{(102 - 76\sqrt{2}) \cdot 2}{2\pi^2} \approx -0.349.$$

**Задача 13.** Доказать формулу (13), используя определение разделенной разности и метод математической индукции.

**Задача 14.** Для функции  $f(x) = \ln x$ , последовательности узлов  $\xi = \{1, 1, 1, e, e\}$  построить интерполяционный многочлен  $P_4 f$ . Используя алгоритм гнездового перемножения, приближенно найти  $f^{(k)}(1, 5)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 4$ .

**Задача 15.** Оценить трудоемкость алгоритма гнездового перемножения для нахождения  $(P_n f)^{(k)}(x^*)$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

**Задача 16.** Предложить свой способ нахождения  $(P_n f)^{(k)}(x^*)$  для многочлена  $P_n f$ , записанного в форме Ньютона. Сравнить по трудоемкости с алгоритмом гнездового перемножения.

**Задача 17.** Написать программу, реализующую алгоритм гнездового перемножения.

## 7. Алгоритм Ремеза

Пусть для непрерывной функции, заданной на отрезке  $[a, b]$ , нужно найти многочлен наилучшего приближения  $p^*$ , то есть

$$\|f - p^*\|_{C[a,b]} = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{C[a,b]}. \quad (14)$$

Известно (см. [5]), что задача (14) всегда имеет решение и это решение единственно.

Есть случаи, когда задача нахождения  $p^*$  может быть точно решена. Например, если  $n = 0$ , то

$$p^* = \frac{1}{2} \left( \max_{x \in [a,b]} f(x) + \min_{x \in [a,b]} f(x) \right).$$

Если же  $n = 1$  и функция  $f$  выпукла (вогнута) на  $[a, b]$ , то

$$p^*(x) = \frac{1}{2} \left( l(x) + l_1(x) \right);$$

здесь  $l$  – линейная функция, интерполирующая  $f$  в точках  $a$  и  $b$ ;  $l_1$  – касательная к функции  $f$ , параллельная  $l$ .

Кроме того, имеет решение задача приближения  $f(x) = x^{n+1}$  многочленами из  $\mathcal{P}_n$ :

$$p_n^*(x) = x^{n+1} - 2 \left( \frac{b-a}{4} \right)^{n+1} T_{n+1} \left( \frac{2x-a-b}{b-a} \right);$$

здесь  $T_n$  – многочлен Чебышева.

Однако найти многочлен наилучшего приближения в пространстве  $C[a, b]$  в общем случае затруднительно. Поэтому на практике мы будем находить многочлен  $p_\varepsilon^*$  ”почти” наилучшего приближения, то есть многочлен, для которого

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p_\varepsilon^*\| \leq \|f - p^*\| + \varepsilon.$$

Алгоритм Ремеза, который будет описан ниже, позволяет построить последовательность многочленов  $p_k$  таких, что

$$\|p_k - p^*\|_{C[a,b]} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Перейдем к описанию алгоритма Ремеза (см. [6]).

Для начала сформулируем теорему, которая лежит в основе алгоритма Ремеза (доказательство теоремы можно найти, например, в [5]).

**Теорема 2** (П. Л. Чебышев). *Многочлен  $p^*$  дает решение задачи (14) тогда и только тогда, когда существует набор  $n + 2$  точек  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$  такой, что*

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^i \gamma \|f - p^*\|_{C[a,b]}; \quad (15)$$

здесь константа  $\gamma$  принимает значение  $\pm 1$ .

Точки  $\{x_i, \quad i = 1, \dots, n + 2\}$ , удовлетворяющие (15), называются чебышевским альтернансом.

### Описание алгоритма Ремеза

#### 1-й шаг. Выбор начального альтернанса

На отрезке  $[a, b]$  выбираем  $n + 2$  точки. Обычно в качестве начальных точек альтернанса выбирают точки

$$x_k^0 = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2(n + 2)}, \quad k = 1, \dots, n + 2.$$

Точки  $x_k^0$  – нули многочлена Чебышева  $T_{n+2}$  (см. (5)).

#### 2-й шаг. Построение многочлена наилучшего приближения по заданному альтернансу

Обозначим  $p_k$  – многочлен наилучшего приближения относительно точек  $x_1^k < \dots < x_{n+2}^k$ , а через  $e_k$  – величину наилучшего приближения функции  $f$ , считая ее заданной только на точках  $\{x_i^k, \quad i = 1, \dots, n + 2\}$ , то есть

$$e_k = \max_{i=1, \dots, n+2} |f(x_i^k) - p_k(x_i^k)|.$$

Точки  $\{x_i, \quad i = 1, \dots, n + 2\}$  образуют альтернанс, следовательно,

$$f(x_i^k) - p_k(x_i^k) = (-1)^i \gamma e_k, \quad i = 1, \dots, n + 2. \quad (16)$$

Получили линейную систему  $n + 2$  уравнений с  $n + 2$  неизвестными. Неизвестными являются  $n + 1$  коэффициент многочлена  $p_k$  и число  $e_k$ . При решении системы (16) можно использовать метод Гаусса, а можно поступить следующим образом.

Построим интерполяционный многочлен  $\varphi$ , который совпадает с функцией  $f$  в точках  $\{x_i^k, i = 1, \dots, n + 2\}$ . Для его вычисления можно воспользоваться формой Ньютона. Теперь строим второй интерполяционный многочлен  $g$ , для которого  $g(x_i^k) = (-1)^i, i = 1, \dots, n + 2$ . Многочлены  $\varphi, g \in \mathcal{P}_{n+1}$ . Выберем число  $\lambda$  так, чтобы многочлен  $\varphi - \lambda g$  имел степень  $n$ . Тогда искомым многочлен  $p_k(x) = \varphi(x) - \lambda g(x)$ . Если сравнить это уравнение с (16), то  $e_k = |\lambda|$ .

### 3-й шаг. Проверка на остановку

Вычислим величину отклонения  $f$  от  $p_k$  на всем отрезке  $[a, b]$ . Ясно, что  $e_k \leq \|f - p_k\|_{C[a,b]}$ . Если же  $e_k = \|f - p_k\|_{C[a,b]}$ , то вместе с (16) это говорит о том, что  $p_k$  является искомым многочленом наилучшего приближения для  $f$  на  $[a, b]$ .

Если задана погрешность вычисления  $\varepsilon$ , то достаточно найти многочлен "почти" наилучшего приближения, то есть нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|f - p_k\|_{C[a,b]} \leq e_k + \varepsilon, \quad (17)$$

где  $\varepsilon$  – допустимая погрешность.

### 4-й шаг. Выбор нового альтернанса

Пусть неравенство (17) не выполняется. Новый набор точек  $a \leq x_1^{k+1} < \dots < x_{n+2}^{k+1}$  получается заменой одной из точек старого набора на точку  $\tilde{x}$ , в которой достигается максимум функции  $|f - p_k|$ . Если таких точек несколько, то берем любую из них. Замена производится так, чтобы и на новом наборе точек функция  $f - p_k$  имела чередующиеся знаки. Рассмотрим различные случаи расположения точек альтернанса и точки  $\tilde{x}$ .

1. Пусть  $a \leq \tilde{x} \leq x_1^k$ ,  $\text{sgn}(f - p_k)(\tilde{x}) = \text{sgn}(f - p_k)(x_1^k)$ . В этом случае точку  $x_1^k$  заменяем на  $\tilde{x}$ . Имеем новый набор:

$$x_1^{k+1} = \tilde{x}, \quad x_i^{k+1} = x_i^k, \quad i = 2, \dots, n + 2.$$

2. Пусть  $a \leq \tilde{x} \leq x_1^k$  и  $\text{sgn}(f - p_k)(\tilde{x}) = -\text{sgn}(f - p_k)(x_1^k)$ . Чтобы сохранить чередование знаков функции  $f - p_k$ , нумерацию начинаем с точки  $\tilde{x}$ , а последнюю точку  $x_{n+2}^k$  исключаем. Получаем набор:

$$x_1^{k+1} = \tilde{x}, \quad x_i^{k+1} = x_{i-1}^k, \quad i = 2, \dots, n + 2.$$

3. Пусть  $x_i^k < \tilde{x} < x_{i+1}^k, i = 1, \dots, n + 1$ . Так как в точках  $x_i^k, x_{i+1}^k$  происходит смена знака функции  $f - p_k$ , то  $\text{sgn}(f - p_k)(\tilde{x})$  совпадает или

с  $\operatorname{sgn}(f - p_k)(x_i^k)$ , или с  $\operatorname{sgn}(f - p_k)(x_{i+1}^k)$ . Заменяем точку, в которой знаки совпадают, на  $\tilde{x}$ .

4. Случай  $x_{n+2}^k \leq \tilde{x} \leq b$ ,  $\operatorname{sgn}(f - p_k)(\tilde{x}) = \operatorname{sgn}(f - p_k)(x_{n+2}^k)$  аналогичен первому: точкой  $\tilde{x}$  заменяем  $x_{n+2}^k$ .

5. Если  $x_{n+2}^k \leq \tilde{x} \leq b$ ,  $\operatorname{sgn}(f - p_k)(\tilde{x}) = -\operatorname{sgn}(f - p_k)(x_{n+2}^k)$ , то поступаем как во втором случае: исключаем точку  $x_1^k$ . Новый набор имеет вид:

$$x_i^{k+1} = x_{i+1}^k; \quad x_{n+2}^{k+1} = \tilde{x}; \quad i = 1, \dots, n+1.$$

После нахождения нового набора полагаем  $k := k + 1$  и переходим ко второму шагу.

**Пример 2.** Задана кусочно-линейная функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1; \\ -x + 3, & 1 \leq x \leq 2; \\ 3x - 5, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad (18)$$

Требуется найти многочлен наилучшего приближения первой степени.

1. Выберем точки  $0, \frac{3}{2}, 3$  в качестве начального альтернанса.
2. Найдем интерполяционный многочлен  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = (x - 0) + \frac{2}{9}x \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x.$$

Аналогично

$$g(x) = -1 + \frac{4}{3}(x - 0) - \frac{8}{9}(x - 0) \left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 1.$$

Подберем  $\lambda$  так, чтобы многочлен  $\varphi(x) - \lambda g(x)$  имел первую степень. Найдим старший коэффициент многочлена  $\varphi(x) - \lambda g(x)$ . Он равен  $\frac{2}{9} - \lambda \left(-\frac{8}{9}\right)$ .

Если взять  $\lambda = -\frac{1}{4}$ , то  $\varphi - \lambda g \in \mathcal{P}_1$  и

$$p_0(x) = \varphi(x) + \frac{1}{4}g(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{4}.$$

Кроме того,  $e_0 = |\lambda| = \frac{1}{4}$ .

3. Функция  $f - p_0$  – кусочно-линейная, поэтому  $\max_{x \in [0,3]} |f(x) - p_0(x)|$  достигается в узлах функции. Перебрав точки  $\{0, 1, 2, 3\}$ , найдем, что

$$\|f - p_0\|_{C[0,3]} = |f(2) - p_0(2)| = \frac{17}{12}.$$

Так как условие  $e_0 = \|f - p_0\|_{C[0,3]}$  не выполняется, то переходим к выбору нового альтернанса.

4. Расположение точки  $\tilde{x} = 2$  соответствует случаю 3, причем  $\operatorname{sgn}(f - p_0)(2) = \operatorname{sgn}(f - p_0)\left(\frac{3}{2}\right)$ , поэтому новый набор образуют точки  $\{0, 2, 3\}$ . Переходим к построению  $p_1$ .

5. В этом случае

$$\varphi(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x; \quad g(x) = -x^2 + 3x - 1.$$

Для нахождения  $\lambda$  получим уравнение  $\frac{5}{6} + \lambda = 0$ . Тогда

$$p_1(x) = \varphi(x) - \frac{5}{6}g(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}; \quad e_1 = c\frac{5}{6}.$$

6. Вычислив величину  $\|f - p_1\|_{C[0,3]} = (f - p_1)(1) = \frac{3}{2}$ , проверяем, что условие  $e_1 = \|f - p_1\|_{C[0,3]}$  не выполняется.

7. Заменяем точкой  $\tilde{x} = 1$  одну из точек альтернанса  $\{0, 2, 3\}$ . Так как

$$0 < \tilde{x} = 1 < 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn}(f - p_1)(0) = \operatorname{sgn}(f - p_1)(1),$$

то новый альтернанс образуют точки  $\{1, 2, 3\}$ . Переходим к построению  $p_2$ .

8. В этом случае

$$\varphi(x) = 2x^2 - 7x + 7, \quad g(x) = -2x^2 + 8x - 7.$$

Отсюда следует, что  $\lambda = -1$ ,  $e_2 = 1$  и  $p_2(x) = x$ .

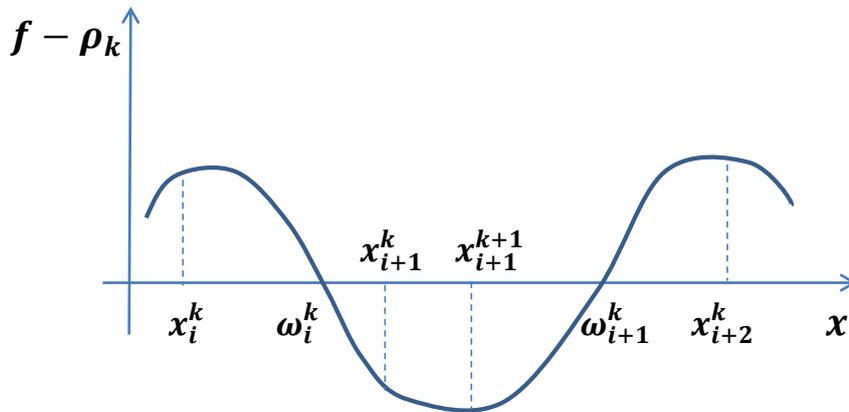
9. Проверка на остановку показывает, что  $e_2 = \|f - p_1\|_{C[0,3]} = 1$ . Итак,  $p_2$  – искомый многочлен наилучшего приближения.

**Замечание.** Вычисление величины  $\|f - p_k\|_{C[a,b]}$  для нахождения точки  $\tilde{x}$  задача довольно сложная. Можно предложить процесс дискретизации, то есть вычислить  $\max_{i=1, \dots, N} |f(t_i) - p_k(t_i)| \approx \|f - p_k\|_{C[a,b]}$ , где  $\{t_i, \quad i = 1, \dots, N\}$  набор точек из  $[a, b]$  и  $N$  – достаточно большое число.

## 8. Модификация алгоритма Ремеза

В описанном выше алгоритме Ремеза при построении нового альтернанса заменяется лишь одна точка набора. Приведем алгоритм, в котором возможна замена сразу всех точек альтернанса.

Первые три шага алгоритма те же. Изменения касаются лишь четвертого шага. Пусть многочлен  $p_k$ , построенный по точкам  $\{x_i^k, i = 1, \dots, n + 2\}$ , найден. Так как в этих точках происходит смена знака функции  $f - p_k$ , то существует не менее  $n + 1$  нулей функции  $f - p_k$ ; обозначим их  $\omega_i^k$ , причем  $x_i^k \leq \omega_i^k \leq x_{i+1}^k, i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Кроме того, положим  $\omega_0^k = a, \omega_{n+2}^k = b$ . На отрезках  $[\omega_i^k, \omega_{i+1}^k]$  функция  $f - p_k$  имеет постоянный знак, причем при переходе к новому отрезку знак  $f - p_k$  меняется.



На каждом отрезке  $[\omega_i^k, \omega_{i+1}^k], i = 0, \dots, n + 1$  найдем точку  $x_{i+1}^{k+1}$ , в которой достигается максимальное значение функции  $|f - p_k|$ , то есть

$$|(f - p_k)(x_{i+1}^{k+1})| = \max_{x \in [\omega_i^k, \omega_{i+1}^k]} |(f - p_k)(x)|. \quad (19)$$

Новый альтернанс  $\{x_i^{k+1}, i = 1, \dots, n + 2\}$  выбран.

**Пример 3.** Используя модифицированный алгоритм Ремеза, найдем для функции, заданной (18), многочлен наилучшего приближения первой степени.

Первые два шага алгоритма, которые касаются нахождения  $p_0(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{4}$ , остаются без изменений. Найдем нули функции  $f - p_0$ :

$$2x - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$-x - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4} = 0, \quad 1 \leq x \leq 2;$$

$$3x - 5 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4} = 0, \quad 2 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Имеем } \omega_1^0 = \frac{38}{28} \text{ и } \omega_2^0 = \frac{57}{20}.$$

Перейдем к построению нового альтернанса. На отрезке  $\left[0, \frac{39}{28}\right]$  условию (19) удовлетворяет точка  $x_1^1 = 1$ ; на отрезке  $\left[\frac{39}{28}, \frac{57}{20}\right]$  – точка  $x_2^1 = 0$ , а на отрезке  $\left[\frac{57}{20}, 3\right]$  выбираем точку  $x_3^1 = 3$ . Новый альтернанс состоит из точек  $(1, 2, 3)$ . Повторив второй и третий шаги алгоритма Ремеза, найдем, что этому альтернансу соответствует многочлен  $p_1(x) = x$ , который и является искомым.

**Замечание.** В случае приближения тригонометрическими многочленами алгоритм Ремеза также имеет место. Напомним определение пространства тригонометрических многочленов  $T_n$ :

$$T_n = \left\{ t : t(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\}.$$

Отличие в построении многочлена наилучшего приближения заключается лишь в количестве точек альтернанса, так как тригонометрический многочлен  $t^* \in T_n$  наименее уклоняется от  $f$  тогда и только тогда, когда разность  $f - t^*$  на  $[0, 2\pi]$  имеет  $2n + 2$  точки альтернанса. Увеличение количества точек альтернанса ведет к увеличению размера линейной системы и более длительному поиску окончательного набора точек.

**Задача 18.** Используя алгоритм Ремеза, приблизить непрерывную функцию  $f$ , заданную на  $[a, b]$  многочленами степени не выше  $n$ . Точность приближения  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

- а)  $f(x) = |x|$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $n = 3$ .
- б)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ ,  $n = 4$ .
- в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ ,  $n = 3$ .
- г)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 8$ ,  $n = 4$ .

**Задача 19.** Сравнить трудоемкость алгоритма Ремеза и модифицированного алгоритма Ремеза.

**Задача 20.** Написать программы, реализующие алгоритмы. Протестировать их на различных функциях. Сравнить время работы программ. Проанализировать полученные результаты.

**Задача 21.** Систему (16) предлагалось решить двумя способами: использовать метод Гаусса и находить интерполяционные многочлены. Сравнить трудоемкость каждого способа решения системы.

**Задача 22.** Приблизить функцию  $f$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\varepsilon$ , используя интерполяционные многочлены и многочлены наилучшего приближения. Сравнить степени полученных многочленов и время работы программ. Программы протестировать на функциях:

- а)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $[a, b] = [0, 4]$ ,  $[a, b] = [0, 100]$ .
- б)  $f(x) = \sin x$ ,  $[a, b] = [0, 2\pi]$ ,  $[a, b] = [0, 20\pi]$ .
- в)  $f(x) = e^x$ ,  $[a, b] = [0, 4]$ ,  $[a, b] = [0, 10]$ .
- г)  $f(x) = |x|$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $[a, b] = [-4, 4]$ .

**Задача 23.** Привести примеры функций, для которых можно точно вычислить многочлен наилучшего приближения.

## 9. Алгоритм Ремеза с интерполированием

Пусть на отрезке  $[a, b]$  нужно наилучшим способом приблизить непрерывную функцию многочленом  $p$  степени не выше  $n$ , причем в точках  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  отрезка  $[a, b]$  значения функции должны совпадать со значениями многочлена

$$f(z_i) = p(z_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (20)$$

Если  $m = n + 1$ , то искомым многочлен является интерполяционным многочленом. Поэтому будем считать, что  $m < n + 1$ . Прежде чем перейти к описанию алгоритма, приведем теорему (см. [7]), которая помогает его понять. Обозначим

$$s(x) = \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^m (x - z_i).$$

**Теорема 3** (Dunham C.). Многочлен  $p$ , удовлетворяющий условию (20), является многочленом наилучшего приближения для  $f$  тогда и только тогда, когда функция  $s(f - p)$  имеет альтернанс, состоящий из  $n + 2 - m$  точек, причем такой многочлен единственный.

Описание алгоритма.

**1-й шаг.** Обозначим  $l = n + 2 - m$ . Пусть  $k = 0$ ; выберем точки  $x_i^k$ ,  $i = 1, \dots, l$  на отрезке  $[a, b]$ , не совпадающие с узлами интерполяции.

**2-й шаг.** Чтобы найти многочлен наилучшего приближения  $p_k$ , удовлетворяющий (20), для которого точки  $\{x_i^k, \quad i = 1, \dots, l\}$  являются альтернансом, необходимо решить систему

$$F_k(x_i^k) = (-1)^i e_k, \quad i = 1, \dots, l$$

и

$$f(z_i) = p_k(z_i) \quad i = 1, \dots, m,$$

(21)

здесь  $F_k := s(f - p_k)$ .

Система (21) имеет  $n + 2$  линейных уравнений и  $n + 2$  неизвестных. Решив ее, мы найдем многочлен  $p_k$  и число  $e_k$ . Если проверка на остановку не выполняется, то переходим к следующему шагу.

**3-й шаг.** Строим новый альтернанс  $\{x_i^k, i = 1, \dots, l\}$ . Для этого можно использовать четвертый шаг алгоритма Ремеза или модифицированного алгоритма Ремеза, применив его к функции  $F_k$ . Затем повторяем процесс, пока не получим искомый многочлен.

**Замечание.** При машинной (или ручной) реализации алгоритма можно упростить вычисления, если сразу после решения системы перейти к выбору нового альтернанса (не делать проверку на остановку). Пусть альтернанс  $\{x_i^k, i = 1, \dots, l\}$  построен. Тогда многочлен  $p_k$  будет искомым многочленом "почти" наилучшего приближения, если погрешности в точках  $x_i^k$  и  $x_i^{k+1}$  мало отличаются, то есть

$$\left| |(f - p_k)(x_i^k)| - |(f - p_k)(x_i^{k+1})| \right| < \varepsilon.$$

**Пример 4.** Найти многочлен "почти" наилучшего приближения второй степени для функции  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-1, 1]$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-1}$  так, чтобы значения многочлена и функции в нуле совпали.

**Решение.** Выберем начальный альтернанс  $\left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ ;  $l = 3$ . Пусть  $p_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0$ , тогда система (21) имеет вид:

$$\begin{cases} s(-1) \cdot (|-1| - (a_0 - b_0 + c_0)) = -e_0 \cdot \gamma, \\ s\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\left|-\frac{1}{2}\right| - \left(\frac{a_0}{4} - \frac{b_0}{2} + c_0\right)\right) = e_0 \cdot \gamma, \\ s(1) \cdot (|1| - (a_0 + b_0 + c_0)) = -e_0 \cdot \gamma, \\ f(0) = p_0(0). \end{cases}$$

Учитывая, что  $s(x) = \operatorname{sgn} x$  и  $p_0(0) = c_0 = 0$ , получим

$$\begin{cases} 1 - a_0 + b_0 = e_0 \cdot \gamma \\ \frac{1}{2} - \frac{a_0}{4} + \frac{b_0}{2} = -e_0 \cdot \gamma \\ 1 - a_0 - b_0 = -e_0 \cdot \gamma. \end{cases}$$

Решив систему, имеем  $p_0(x) = x^2 = \frac{x}{6}$ ,  $e_0\gamma = -\frac{1}{6}$ . Так как  $e_0 > 0$ , то  $e_0 = \frac{1}{6}$ ,  $\gamma = -1$ .

Выполним проверку на остановку. Для этого найдем  $\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_0(x)|$  и точку  $\tilde{x}$ , где этот максимум достигается. Имеем

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_0(x)| = \frac{49}{144} \quad \text{и} \quad \tilde{x} = \frac{7}{12}.$$

Так как  $\|f - p_0\|_{C[-1,1]} - e_0 > \varepsilon$ , то продолжаем вычисления.

Перейдем к выбору нового альтернанса. Заменяем одну из точек  $-\frac{1}{2}$  или  $1$  на точку  $\frac{7}{12}$ . Для этого вычислим знак функции  $F_0(x) = s(x)(f - p_0)(x)$  в точке  $\frac{7}{12}$ . Так как знаки функции  $F_0$  в точках  $\frac{7}{12}$  и  $1$  совпадают, то заменяем точку  $x = 1$ . Получаем новый альтернанс  $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{7}{12}\right\}$ .

Найдем многочлен  $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ . Система (21) имеет вид:

$$\begin{cases} 1 - (-b_1 + a_1) = e_1\gamma \\ \frac{1}{2} - \left(-\frac{b_1}{2} + \frac{a_1}{4}\right) = -e_1\gamma \\ \frac{7}{12} - \left(\frac{7}{12}b_1 + \frac{49}{144}a_1\right) = -e_1\gamma. \end{cases}$$

Решив ее, получим  $p_1(x) = \frac{168}{143}x^2 - \frac{3}{143}x$ ;  $e_1 = \frac{28}{143}$ . Так как  $\|f - p_1\|_{C[-1,1]} - e_1 < \varepsilon$ , то  $p_1$  - искомый многочлен.

**Задача 24.** Показать, что решение системы (16) в случае  $n = 1$  можно найти по формулам:

$$a_1^k = \frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1}, \quad a_0^k = f_1 + f_2 - a_1^k(x_1 + x_4);$$

здесь  $f_i = f(x_i^k)$ ;  $x_i = x_i^k$ ;  $a_1^k, a_0^k$  - коэффициенты многочлена  $p_k$ .

Найти  $e_k$ .

**Задача 25.** Доказать (см. [8]), что коэффициенты многочлена  $p_k(x) = a_2^kx^2 + a_1^kx + a_0^k$ , которые определяются из системы (16), можно найти по формулам:

$$a_2^k = \frac{\alpha(f_1 - f_3) + \beta(f_2 - f_4)}{\alpha(x_1^2 - x_3^2) + \beta(x_2^2 - x_4^2)};$$

$$2a_1^k = f_3 - f_1 - a_2^k(x_1^2 - x_3^2);$$

$$2a_0^k = f_1 + f_4 - a_2^k(x_1^2 + x_4^2) - a_1^k(x_1 + x_4).$$

Здесь  $\alpha = x_2 - x_4$ ,  $\beta = x_3 - x_1$ .

Найти  $e_k$ .

**Задача 26.** Найти решение системы (16) в случае  $n = 3$ . Сравнить трудоемкость вычисления по методу Гаусса и по полученным формулам.

## 10. Метод наименьших квадратов

До сих пор мы решали задачу приближения функций многочленами из  $\mathcal{P}_n$  в пространстве  $C[a, b]$ . Хотя и существует единственный многочлен наилучшего приближения, но найти его достаточно сложно. Сейчас мы покажем, как решается эта задача, если приближать функции в пространстве, где задано скалярное приближение, согласованное с нормой.

Напомним, что пространство  $L_{2\rho}[a, b]$  состоит из функций  $f$ , для которых величина

$$\|f\|_{L_{2\rho}[a,b]} := \left( \int_a^b \rho(x)(f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

конечна, здесь  $\rho(x) > 0$  – весовая функция.

Если функция  $f$  определена на дискретном множестве точек  $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$ , то аналогом  $L_{2\rho}[a, b]$  является пространство  $l_{2\rho}^N$ .

Пространство  $l_{2\rho}^N$  состоит из векторов  $\bar{f} = (f_1, \dots, f_N)$ ,  $f_i = f(x_i)$ , для которых величина

$$\|\bar{f}\|_{l_{2\rho}^N} := \left( \sum_{i=1}^N \rho_i (f_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

конечна, здесь  $\rho_i = \rho(x_i)$ .

Формулы (22), (23) можно объединить, если вспомнить определение скалярного произведения. Тогда

$$\|f\|_H^2 = (f, f);$$

здесь  $H$  – или  $L_{2\rho}[a, b]$ , или  $l_{2\rho}^N$ .

Пусть теперь  $A$  –  $n$ -мерное пространство. Тогда задача нахождения элемента наилучшего приближения может быть записана в виде

$$\|f - a^*\|_H^2 = \inf_{a \in A} (f - a, f - a).$$

Выберем базис в пространстве  $A$ ,  $A = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$  и  $a = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ . Учитывая свойства скалярного произведения, получим

$$\begin{aligned} F(a_1, \dots, a_n) &= (f - a, f - a) = \left( f - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, f - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{i=1}^n a_i (f, \varphi_i) + \sum_{i=1}^n (a_i \varphi_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j \varphi_i \varphi_j. \end{aligned}$$

Так как функционал  $F$  выпуклый, то, взяв производные по всем  $a_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и приравняв их нулю, получим систему

$$(f, \varphi_k) = \sum_{i=1}^n a_i^* (\varphi_i, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Итак, решение задачи свелось к решению системы линейных уравнений. Искомый "многочлен" наилучшего приближения имеет вид:

$$a^* = a_1^* \varphi_1 + \dots + a_n^* \varphi_n.$$

Мы описали метод наименьших квадратов. Теперь все будет зависеть от того, какое пространство  $H$  взяли и как выбран базис.

**Пример 5.** Пусть на плоскости задан набор точек  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Нужно, используя метод наименьших квадратов, приблизить этот набор прямой. Найти погрешность приближения.

**Решение.** Будем считать, что  $\rho(x) = 1$ ,  $f(x_i) = y_i$ . Так как приближаем многочленом первой степени, то  $A = \mathcal{P}_1 = \langle 1, x \rangle$ ,  $H = l_2^N$ . Система (24) состоит из двух уравнений с двумя неизвестными. Вычислим скалярные произведения, входящие в (24):

$$\begin{aligned} (f, 1) &= \sum_{i=1}^N f(x_i); & (f, x) &= \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot x_i; & (1, 1) &= N; \\ (1, x) &= \sum_{i=1}^N x_i; & (x, x) &= \sum_{i=1}^N x_i^2. \end{aligned}$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} a_1^* N + a_2^* \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i \\ a_1^* \sum_{i=1}^N x_i + a_2^* \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i. \end{cases} \quad (25)$$

Решив ее, найдем  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ . Тогда искомая прямая  $y = a_1^* + a_2^*x$ . Погрешность приближения найдем по формуле

$$\|f - a^*\|_{l_2^N} = \left( \sum_{i=1}^N (f_i - (a_1^* + a_2^*x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Задача 27.** Решив систему (25), найти формулы для нахождения чисел  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ .

**Задача 28.** Используя метод наименьших квадратов, заданный набор точек  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  приблизить параболой. Оценить трудоемкость метода. Написать программу, реализующую данный алгоритм. Протестировать на данных, "похожих" на параболу.

**Задача 29.** Приблизить функцию  $f$  на отрезке  $[a, b]$  многочленом из  $\mathcal{P}_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), используя метод наименьших квадратов.

$$1) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad [a, b] = [-1, 1].$$

$$2) f(x) = \sin 2x, \quad [a, b] = [0, \pi].$$

$$3) f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 1, \quad x \in [-2, 2].$$

**Задача 30.** Приблизить функцию  $f$  в пространстве  $L_2[-1, 1]$  многочленом из  $\mathcal{P}_n$  с точностью  $\varepsilon$ . Составить график зависимости степени многочлена от точности приближения.

$$1) f(x) = \sqrt{|x|}, \quad 4) f(x) = \frac{1}{x^2 + 25}.$$

$$2) f(x) = \sin 4x, \quad 5) f(x) = e^x + x^2.$$

$$3) f(x) = e^x.$$

**Задача 31.** Пусть получены экспериментальные данные  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Точка  $(x_1, y_1)$  вычислена с большей точностью. Как, используя весовую функцию, учесть эту информацию при построении прямой, которая заменит данный набор точек?

## 11. Приближение ортогональными многочленами

Пусть требуется приблизить функцию  $f \in L_{2\rho}[a, b]$  многочленами из  $\mathcal{P}_n$ . Мы показали, что для этого нужно решить систему (24). Если выбрать в качестве базиса многочлены  $\varphi_i(x) = x^i$ , то главный определитель этой системы

(определитель Грама) будет стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что система (24) плохо обусловлена, то есть малые изменения исходных данных ведут к большим изменениям результата (см. задачу 30). Чтобы избежать потери точности, нужно правильно выбрать базис. Например, если функции  $\{\varphi_i, \quad i = 0, \dots, n\}$  являются ортогональной системой многочленов, то решение системы (24) имеет вид:

$$a_k^* = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\rho(x)dx, \quad k = 0, \dots, n. \quad (26)$$

Получить ортонормированную систему можно двумя способами: применить процесс ортогонализации или использовать известные системы ортогональных многочленов. Напомним их определение (см., например, [10]).

**Определение 2.** Многочленами Якоби  $J_k^{(\alpha, \beta)}$  называются многочлены, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом

$$\rho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Наиболее распространены случаи  $\alpha = \beta = 0$  и  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ . Многочлены, соответствующие этим значениям, называются многочленами Лежандра и многочленами Чебышева.

Для вычисления ортогональной системы  $J_k^{(\alpha, \beta)}$  удобно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$J_{k+2}^{(\alpha, \beta)}(x) = ((x - a_k)J_{k+1}^{(\alpha, \beta)}(x) - b_k J_k^{(\alpha, \beta)}(x)) \frac{1}{\beta_k + 1}; \quad k = -1, 0, 1, \dots,$$

где

$$a_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k + \alpha + \beta + 2)(2k + \alpha + \beta + 4)}$$

и

$$b_k = \frac{2}{(2k + \alpha + \beta + 2)} \sqrt{\frac{(k + \alpha + \beta + 1)(k + 1)(k + \alpha + 1)(k + \beta + 1)}{(2k + \alpha + \beta + 1)(2k + \alpha + \beta + 3)}}.$$

Кроме того,

$$J_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0, \quad J_0^{(\alpha, \beta)}(x) = \left( \int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta dx \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

**Определение 3.** Многочленами Лагерра  $L_n^\alpha$  называются многочлены, ортогональные на отрезке  $[0, \infty)$  с весом  $\rho(x) = e^x x^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ .

Для нахождения ортонормированной системы  $L_n^\alpha$  можно воспользоваться рекуррентными соотношениями:

$$L_{n+2}^\alpha(x) = \frac{x - \alpha - 2n - 3}{\sqrt{(n+2)(n+2+\alpha)}} L_{n+1}^\alpha(x) - \sqrt{\frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{(n+2)(n+2+\alpha)}} L_n^\alpha(x)$$

и

$$L_{-1}^\alpha(x) = 0, \quad L_0^\alpha(x) = \left( \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \right)^{-\frac{1}{2}} = \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha + 1).$$

**Определение 4.** Многочленами Эрмита  $H_n$  называются многочлены, ортогональные на  $(-\infty, +\infty)$  с весом  $\rho(x) = e^{-x^2}$ .

Рекуррентная формула для вычисления многочленов  $H_n$  имеет вид:

$$\sqrt{n+2} \cdot H_{n+2}(x) = \sqrt{2} \cdot x \cdot H_{n+1}(x) - \sqrt{n+1} \cdot H_n(x)$$

и

$$H_{-1}(x) = 0; \quad H_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}.$$

Перейдем к описанию алгоритма приближения ортогональными многочленами. Пусть нужно приблизить функцию  $F \in L_{2\rho}[a, b]$  многочленами из  $\mathcal{P}_n$ .

**1-й шаг.** Воспользовавшись подстановкой  $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$ , находим функцию  $f(x) = F\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)$ , заданную на отрезке  $[-1, 1]$ .

**2-й шаг.** В зависимости от условия задачи выбираем одну из ортогональных систем  $\varphi_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

**3-й шаг.** Вычислим по рекуррентным соотношениям функции системы.

**4-й шаг.** По формулам (26) найдем коэффициенты  $a_k^*$  многочлена

$$g_n^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x). \quad (27)$$

При вычислении можно использовать квадратурные формулы.

**5-й шаг.** Для нахождения искомого многочлена вернемся к отрезку  $[a, b]$ . Для этого в (27) выполним замену  $x = (b-a)^{-1}(2t - a - b)$ . Таким образом, искомым многочлен

$$p_n^*(t) = g_n^*((b-a)^{-1}(2t - a - b)).$$

**6-й шаг.** Для оценки точности приближения на отрезке  $[-1, 1]$  нужно заметить, что

$$\|f - g_n^*\|_{L_{2\rho}[-1,1]} = \left( \int_{-1}^1 p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k^{*2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

Это равенство следует из ортонормированности системы  $\{\varphi_k, k = 1, \dots, n\}$ . Тогда

$$\|f - p_n^*\|_{L_{2\rho}[a,b]} = \sqrt{\frac{b-a}{2}} \|f - g_n^*\|_{L_{2\rho}[-1,1]}.$$

**Пример 6.** Пусть на отрезке  $[0, 1]$  задана функция  $F(t) = \sqrt{2t}$ . Найдите  $p_2^*$  и погрешность приближения.

**Решение.** 1.  $f(x) = \sqrt{x+1}, x \in [-1, 1]$ .

2. Выберем многочлен Лежандра  $\varphi_k = J_k^{(0,0)} = J_k$ . Используя рекуррентную формулу

$$J_{k+2}(x) = \left( x J_{k+1}(x) - \frac{k+1}{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}} J_k(x) \right) \frac{\sqrt{(2k+3)(2k+5)}}{k+2}$$

и  $J_{-1} = 0, J_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , получим

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad J_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right).$$

3. Вычислим коэффициенты  $a_k^*, k = 0, 1, 2$ . Тогда

$$g_2^*(x) = \frac{4}{3}J_0(x) + \frac{4}{5\sqrt{3}}J_1(x) - \frac{4}{\sqrt{5} \cdot 21}J_2(x).$$

4. Искомый многочлен

$$p_2^*(t) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{5}(2t-1) - \frac{(3(2t-1)^2-1)}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{21}.$$

5. По формуле (28) находим погрешность на отрезке  $[-1, 1]$ :

$$\|f - g_n^*\|_{L_2[-1,1]} \approx 0.08.$$

6. Вычислим погрешность на отрезке  $[0, 1]$ :

$$\|f - p_n^*\|_{L_2[0,1]} \approx \frac{0.08}{\sqrt{2}} \approx 0.056.$$

**Задача 32.** Применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта к последовательности многочленов  $\{1, x, \dots, x^n\}$ . Сравнить с многочленами Лежандра. Показать, что при вычислении коэффициентов многочленов с ростом  $n$  накапливаются погрешности численного интегрирования.

**Задача 33.** Сравнить приближение многочленами из  $\mathcal{P}_n$  в пространстве  $C[a, b]$  и  $L_2[a, b]$ . Доказать, что для  $f \in C[a, b]$

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{L_2[a, b]} \leq \sqrt{b - a} \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{C[a, b]}.$$

Можно ли получить противоположное неравенство?

**Задача 34.** Приблизить функцию  $f$  на  $[a, b]$ , используя ортогональные многочлены Лежандра с погрешностью  $\varepsilon$ :

- 1)  $f(x) = |2x + 5|$ ,  $[-3, 2]$ ;
- 2)  $f(x) = 2x^9 - x^8 + 4$ ,  $[-1, 1]$ ;
- 3)  $f(x) = \sin 2x$ ,  $[0, 2\pi]$ ;
- 4)  $f(x) = \sin 10x$ ,  $[0, 2\pi]$ .

Использовать полученные многочлены для приближения  $f$  в пространстве  $C[a, b]$ . Приблизить функцию  $f$  в пространстве  $C[a, b]$  интерполяционным многочленом с той же точностью. Сравнить степени полученных многочленов.

**Задача 35.** Приблизить функцию  $f$  на отрезке  $[0, \beta]$  многочленами Чебышева  $T_n$ . Как меняется погрешность приближения при увеличении  $\beta$ ?

- 1)  $f(x) = e^x + x^2 - 5x$ ;
- 2)  $f(x) = \sin(e^x) + x^5 - 2$ ;
- 3)  $f(x) = \sin x$ .

**Задача 36.** Приблизить функцию  $f$  на отрезке  $[0, \beta]$ , ( $\beta \gg 1$ ) с помощью многочленов Лагерра. Сравнить с результатами задачи 35.

**Задача 37.** Предложить несколько способов вычисления коэффициентов по формуле (26). Сравнить точность приближения.

## 12. Приближение тригонометрическими многочленами. Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Продолжим приближать функцию  $f$  в пространстве  $L_2[0, 2\pi]$ , используя ортогональные многочлены. Однако сейчас приближать будем тригонометрическими многочленами из пространства  $T_{n-1}$ . Так как система

$\{1, \sin kx, \cos kx, \quad k = 1, \dots, n-1\}$  образует ортогональный базис в  $T_{n-1}$ ,  $(1, 1) = 2\pi$  и

$$(\cos kx, \cos kx) = (\sin kx, \sin kx) = \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

то коэффициенты многочлена наилучшего приближения можно найти по формулам:

$$a_k^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx; \quad b_k^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (29)$$

Искомый многочлен имеет вид:

$$p_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^* \cos kx + b_k^* \sin kx).$$

Для вычисления по формулам (29) можно воспользоваться квадратурными формулами, заменив подынтегральное выражение многочленом. Но функции  $f(x) \cos kx$ ,  $f(x) \sin kx$  имеют на  $[0, 2\pi)$  не менее  $2k$  нулей, поэтому хорошо могут быть приближены только многочленами степени, большей  $2k$ . Но с ростом степени построение таких многочленов затрудняется. Более удобно рассматривать функции  $\cos kx$ ,  $\sin kx$  как весовые, а многочленом заменить функцию  $f$ . Для вычисления по формулам (29) при больших  $n$ , а также для функций  $f$ , заданных на дискретном множестве точек, можно применить алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Пусть  $f$  задана в  $n$  равноудаленных точках  $x_p = \frac{2\pi}{n}p$ ,  $p = 0, \dots, n-1$ . Тогда дискретный аналог (29) имеет вид:

$$a_k^* = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} f_p \cos kx_p; \quad b_k^* = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} f_p \sin kx_p; \quad (30)$$

здесь  $f_p := f(x_p)$ .

Если учесть, что  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , то формулы (30) можно объединить в одну:

$$c_k^* = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} e^{ik \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot p} f_p, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (31)$$

Перепишем (31) в матричном виде. Для этого обозначим  $q = e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}$ . Тогда (31) можно записать так:

$$\bar{c} = \frac{2}{n} \cdot G \bar{f}; \quad (32)$$

здесь  $\bar{c}, \bar{f}$  – вектор-столбцы  $\bar{c} = (c_0, \dots, c_{n-1})^T$ ,  $\bar{f} = (f_0, \dots, f_{n-1})^T$ , а матрица  $G$  имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{n-1} & q^{2(n-1)} & \dots & q^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления  $\bar{c}$  по формуле (32) нужно выполнить  $O(n^2)$  комплексных операций умножения и сложения.

Перейдем к описанию алгоритма, который значительно уменьшает количество операций для вычисления вектора  $\bar{c}$  (см., например, [10]). Разработанный Кули (Coollet) и Таки (Takey) алгоритм БПФ опирается на следующий факт: если  $n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_N$ , где  $r_i$  – целые числа, то матрицу  $G$  можно представить в виде произведения  $N$  матриц  $G_1, \dots, G_N$  порядка  $n \times n$  таких, что у каждой матрицы  $G_i$  имеется только  $r_i n$  отличных от нуля элементов. Тогда (32) записывается в виде

$$\bar{c} = \frac{2}{n} \cdot G_N \cdot G_{N-1} \cdot \dots \cdot G_1 \bar{f}. \quad (33)$$

Согласно алгоритму Кули-Таки, умножение матрицы  $G_i$  на вектор  $G_{i-1} \cdot \dots \cdot G_1 \bar{f}$  осуществляется за  $r_i n$  операций (алгоритм отбрасывает умножение на нули). Тогда для вычисления по формуле (33) потребуется  $(r_1 + r_2 + \dots + r_N)n$  операций. Например, если  $n = 2^N$ , то трудоемкость алгоритма  $O(n \cdot \log_2 n)$ .

Покажем, как разложить матрицу  $G$  на  $N$  матриц ( $n = 2^N$ ). Для этого обозначим через  $g_{ij}^m$  ( $i, j = 1, \dots, 2^N$ ) элементы матрицы  $G_m$ . Положим

$$g_{\alpha 2^m + \beta; \alpha 2^{m-1} + \beta}^m = g_{\alpha 2^m + 2^{m-1} + \beta; \alpha 2^{m-1} + \beta}^m = 1$$

и

$$g_{\alpha 2^m + \beta; 2^{N-1} + \alpha 2^{m-1} + \beta}^m = -g_{\alpha 2^m + 2^{m-1} + \beta; 2^{N-1} + \alpha 2^{m-1} + \beta}^m = q^{(\beta-1)2^{N-m}};$$

здесь  $\alpha = 0, 1, \dots, 2^{N-m} - 1$  и  $\beta = 1, \dots, 2^{m-1}$ .

Для остальных пар  $(i, j)$  пусть  $g_{ij}^m = 0$ . Тогда компоненты вектора  $\bar{d}^1 := G_1 f$  вычисляем по формулам:

$$d_{2k}^1 = f_k + f_{2^{N-1}+k}; \quad d_{2k+1}^1 = f_k - f_{2^{N-1}+k}; \quad k = 0, \dots, 2^{N-1} - 1. \quad (34)$$

Пусть теперь  $\bar{d}^m := G_m \cdot G_{m-1} \cdot \dots \cdot G_1 f$ , тогда координаты вектора  $\bar{d}^m$  вычисляем по формулам:

$$d_{\alpha 2^m + \beta}^m = d_{\alpha 2^{m-1} + \beta}^{m-1} + q^{\beta 2^{N-m}} \cdot d_{\alpha 2^{m-1} + \beta + 2^{N-1}}^{m-1}$$

и

$$d_{\alpha 2^m + \beta + 2^{m-1}}^m = d_{\alpha 2^{m-1} + \beta}^{m-1} - q^{\beta 2^{N-m}} \cdot d_{\alpha 2^{m-1} + \beta + 2^{N-1}}^{m-1}; \quad (35)$$

здесь  $m = 2, \dots, N$ ;  $\alpha = 0, \dots, 2^{N-m} - 1$ ;  $\beta = 0, \dots, 2^{m-1} - 1$ .

**Задача 38.** Используя метод БПФ, вычислить многочлен наилучшего приближения  $p^* \in T_{n-1}$  для функции  $f$ , если

1.  $f(x) = \sin^4 x$ ,  $n = 2^3$ ;
2.  $f(x) = |\sin x|$ ,  $n = 2^4$ ;
3.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ ,  $n = 2^4$ ;
4.  $f(x) = \ln |\sin \frac{x}{2}|$ ,  $n = 2^4$ ;
5.  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ ,  $n = 2^5$ ;
6.  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ,  $n = 2^6$ .

Сравнить результаты вычислений с точными решениями:

1.  $p^*(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$ ;
2.  $p^*(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^7 \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$ ;
3.  $p^*(x) = \frac{4}{7} \sum_{k=1}^7 (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$ ;
4.  $p^*(x) = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{15} \frac{\cos kx}{k}$ ;
5.  $p^*(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{15} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x$ ;
6.  $p^*(x) = \sum_{k=0}^{63} \frac{\sin kx}{k}$ .

**Задача 39.** Используя формулы (34), (35), оценить трудоемкость метода БПФ. Сравнить скорость вычисления по формуле (32) (без использования метода БПФ) и формулам (34), (35).

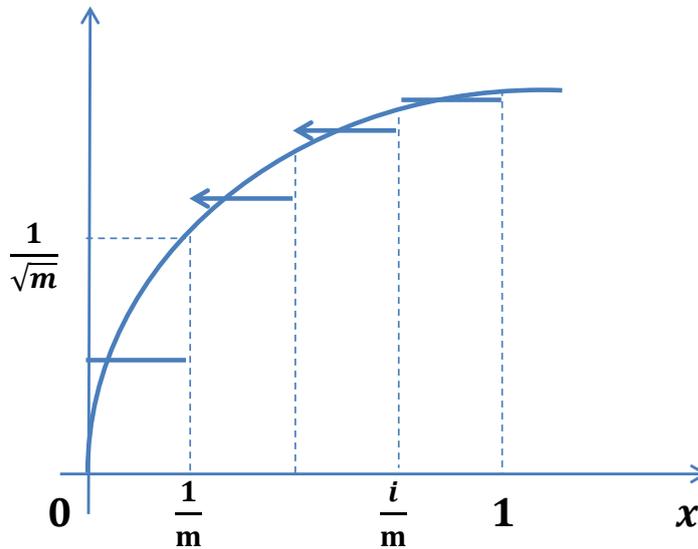
**Задача 40.** Как изменятся формулы БПФ, если приближать нужно на отрезке  $[a, b]$ ?

**Задача 41.** Предложить несколько способов приближенного вычисления коэффициентов по формулам (29). Сравнить полученные результаты по скорости и точности вычислений.

**Задача 42.** Пусть задана функция  $f(x) = \sin^2 x + x^5 - 2x$ . Приблизить  $f$  в пространстве  $L_2[0, k\pi]$  с точностью  $\varepsilon$  алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Сравнить степени полученных многочленов. Повторить вычисления для различных  $k$ .

## 13. Приближение кусочно-полиномиальными функциями

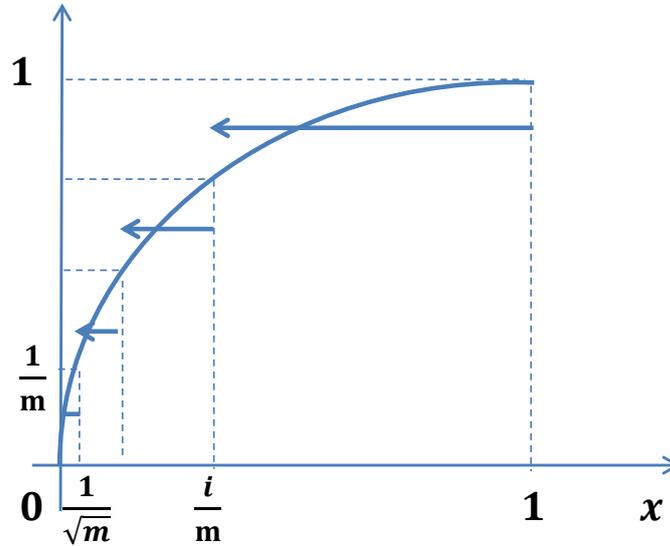
Ранее мы говорили, что многочлены как аппарат приближения обладают рядом недостатков. Например, они плохо приближают быстро осциллирующие или недостаточно гладкие функции. В этом случае можно разбить область определения на отрезки и на каждом отрезке приблизить функцию многочленом. Если точки разбиения правильно выбрать, то можно получить хорошую точность приближения. Например, пусть на отрезке  $[0, 1]$  нужно приблизить функцию  $f(x) = \sqrt{x}$ . Так как в точке  $x = 0$  функция  $f$  имеет особенность, то она плохо приближается многочленами. Будем приближать  $f$  кусочно-полиномиальными функциями. Разделим отрезок  $[0, 1]$  на  $m$  равных частей и на каждой части приблизим константой. Получим кусочно-постоянную функцию  $s$ :



Даже не проводя вычислений, из рисунка видно, что самая большая погрешность достигается на первом отрезке:

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - s(x)| = \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Теперь выберем другой способ разбиения отрезка  $[0, 1]$ . Для этого на  $m$  равных частей разделим область значений функции  $f$ . Точки  $y_i = \frac{i}{m}$ ,  $i = 0, \dots, m$  порождают разбиение  $x_i = \sqrt{\frac{i}{m}}$ ,  $i = 0, \dots, m$ . Теперь на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  найдем константу наилучшего приближения. Получим кусочно-постоянную функцию  $s_1$ :



Из определения функции  $s_1$  следует, что

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - s_1(x)| = \frac{1}{2m}.$$

Таким образом, правильно выбрав узлы разбиения, мы смогли в  $\sqrt{m}$  раз уменьшить погрешность.

Алгоритм, описанный выше, является примером адаптивного алгоритма, так как разбиение заранее не задается, а выбирается в зависимости от приближаемой функции. Адаптивные алгоритмы будут описаны в дальнейшем во второй части пособия. Здесь мы приведем самый простой адаптивный алгоритм, который можно было бы назвать методом половинного деления.

Далее через  $\mathcal{P}_n(\Delta)$  будем обозначать пространство кусочно-полиномиальных функций степени не выше  $n$ , подчиненных разбиению  $\Delta$ :  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ .

Перейдем к описанию алгоритма.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $f$ . Требуется приблизить ее кусочно-полиномиальной функцией  $s \in \mathcal{P}_n(\Delta)$  с заданной точностью  $\varepsilon$ . Разбиение  $\Delta$  заранее не задано.

**1-й шаг.** Найдем на  $[a, b]$  приближение функции  $f$  многочленом из  $\mathcal{P}_n$ , используя один из описанных ранее методов (алгоритм Ремеза, многочленную интерполяцию).

**2-й шаг.** Вычислим погрешность приближения  $\varepsilon_1$ . Если  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ , то мы решили поставленную задачу.

**3-й шаг.** Если  $\varepsilon_1 > \varepsilon$ , то делим отрезок  $[a, b]$  пополам и на каждом полученном отрезке повторяем первый шаг.

**4-й шаг.** Вновь считаем погрешности приближения  $\varepsilon_{\text{лев}}$  и  $\varepsilon_{\text{прав}}$ . Если  $\varepsilon_{\text{лев}} < \varepsilon$  и  $\varepsilon_{\text{прав}} < \varepsilon$ , то мы построили функцию  $s$ . В противном случае делим

тот отрезок, для которого неравенство не выполняется. Повторяем процесс до тех пор, пока на каждом отрезке погрешность приближения не будет меньше  $\varepsilon$ .

**Задача 43.** Найти размерность и базис пространства  $\mathcal{P}_n(\Delta)$ .

**Задача 44.** Написать программу, реализующую алгоритм половинного деления. Протестировать его на функциях

$$1) f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in [-1, 1];$$

$$2) f(x) = \sin kx, \quad x \in [0, \pi];$$

$$3) f(x) = \ln x, \quad x \in [0, 10].$$

**Задача 45.** Приблизить функцию  $f$  с заданной точностью многочленом из  $\mathcal{P}_n$  и кусочно-полиномиальной функцией из  $\mathcal{P}_k(\Delta)$ . Сравнить  $\dim \mathcal{P}_n$  с  $\dim \mathcal{P}_k(\Delta)$  и время работы программ.

## 14. Алгоритм склейки

В последнем разделе будет описан алгоритм склейки, который был предложен Ю. А. Брудным в [11] (см. также [2]). Алгоритм позволяет заменить кусочно-полиномиальное приближение на приближение сплайнами, сохраняя при этом тот же порядок аппроксимации. Напомним определение пространства сплайнов  $S_n(\Delta)$  степени не выше  $n$ , подчиненных разбиению  $\Delta$ :

$$S_n(\Delta) := \mathcal{P}_n(\Delta) \cap C^{n-1}[a, b];$$

здесь  $\Delta$  – разбиение отрезка  $[a, b]$ . Ниже через  $\Delta_m$  будем обозначать равномерное разбиение  $[a, b]$  на  $m$  частей.

Сформулируем теорему, для доказательства которой и был применен алгоритм склейки.

**Теорема 4** (Ю. А. Брудный). Пусть  $f \in C[a, b]$  и для любого  $m \in \mathbb{N}$  найдется кусочно-полиномиальная функция  $g_m \in \mathcal{P}_n(\Delta_m)$  такая, что

$$\|f - g_m\|_{C[a,b]} \leq \omega_n \left( f, \frac{1}{m} \right).$$

Тогда существует сплайн  $s_m \in S_n(\Delta_{m(n-1)})$ , для которого

$$\|f - s_m\|_{C[a,b]} \leq c(n) \omega_n \left( f, \frac{1}{m} \right).$$

Здесь, как обычно, модуль непрерывности  $\omega_n(f, t)$  определяется по формуле

$$\omega_n(f, t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^n f\|_{C[a, b-nh]}.$$

Перейдем к описанию алгоритма.

**1-й шаг.** Приближаем  $f$  многочленом из  $\mathcal{P}_n$ . Если погрешность достигается, то  $p$  – искомый многочлен. Если нет, то переходим к шагу 2.

**2-й шаг.** Разбиваем отрезок  $[a, b]$  на  $m$  равных частей;  $x_i = a + i \frac{b-a}{m}$  – узлы разбиения. Сначала берем  $m = 3$ . На каждом удвоенном отрезке  $[x_i, x_{i+2}]$ ,  $i = 0, \dots, m-2$  находим многочлен наилучшего приближения функции  $f$ . Обозначим его  $p_{i+1}$ .

**3-й шаг.** На отрезках  $[a, x_1]$  и  $[x_{m-1}, b]$  искомый сплайн  $s$  совпадает с многочленом  $p_0$  и  $p_{m-1}$  соответственно.

**4-й шаг.** Строим сплайн на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m-2$ . Для этого вычисляем значение многочлена  $p_i$  и всех его производных до порядка  $n-1$  в точке  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m-2$ ).

**5-й шаг.** Разбиваем отрезок  $[x_i, x_{i+1}]$  на  $n$  равных частей. Строим сплайн  $s$ , который подчинен этому разбиению и удовлетворяет граничным условиям  $s^{(k)}(x_i) = p_i(x_i)$ ,  $s^{(k)}(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Для определения сплайна получаем линейную систему  $n(n+1)$  уравнений с  $n(n+1)$  неизвестными.

**6-й шаг.** Проверяем выполнение условия

$$\|f - s\|_{C[a, b]} \leq \varepsilon.$$

Если условие не выполняется, то увеличиваем  $m$  на 1 и переходим к шагу 2.

**Задача 46.** Найти размерность пространства  $S_k(\Delta)$ .

**Задача 47.** Используя результат задачи 46, показать, что сплайн  $s$ , описанный в алгоритме склейки, единственный.

**Задача 48.** Приблизить непрерывную функцию с заданной точностью многочленом, кусочно-полиномиальной функцией, сплайном. Проанализировать полученные результаты.

# Литература

- [1] *Де Бор, К.* Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор. – М. : Радио и связь, 1985. – 304 с.
- [2] *Брудный, Ю. А.* Прикладная теория приближения : учебное пособие / Ю. А. Брудный, И. П. Иродова. – Ярославль : ЯрГУ, 1986. – 88 с.
- [3] *Абрамович, М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамович, И. Стриган. – М. : Наука, 1977. – 832 с.
- [4] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : МГУ, 2011. – 640 с.
- [5] *Бердышев, В. И.* Аппроксимаций функций, сжатие численной информации, приложения / В. И. Бердышев, Л. В. Петрак. – Екатеринбург : УрО-РАН, 1999. – 296 с.
- [6] *Ремез, Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения / Е. Я. Ремез. – Киев : Наукова думка, 1969. – 624 с.
- [7] *Dunham, C. V.* Remez Algorithm for chebyshev approximation with interpolation / C. V. Dunham // Computing. – 1982. – Vol. 28, № 1. – P. 75-78.
- [8] *Попов, Б. А.* Приближение функций для технических приложений / Б. А. Попов, Т. С. Теслер. – Киев : Наукова думка, 1980. – 252 с.
- [9] *Лоран, П. Ж.* Аппроксимация и оптимизация / П. Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
- [10] *Ефимов, А. В.* Математический анализ (специальные разделы) / А. В. Ефимов. – М. : Высшая школа, 1980. – 279 с.
- [11] *Брудный, Ю. А.* Сплайн-аппроксимация и функции ограниченной вариации / Ю. А. Брудный // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 215, № 3. – С. 511-513.

Учебное издание

**Иродова**

Ирина Павловна

**Материалы по дисциплине  
"Алгоритмы теории приближения"**

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерный набор, верстка И. П. Иродова

Подписано в печать 25.04.2019. Формат 60×84 1/16.  
Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 3 экз.

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.