С. В. Алешин, А. О. Толбей

Математические модели

в экономике

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. В. Алешин, А. О. Толбей

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Ярославль
ЯрГУ
2019

УДК 330.4(075.8)
ББК В183.5я73+У.в611я73
А49

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2019 года.

Рецензенты:

А. В. Ястребов, доктор педагогических наук, профессор;

кафедра высшей математики РГАТУ им. П. А. Соловьева

Алешин, Сергей Владимирович.
А49 Математические модели в экономике : учебное пособие / С. В. Алешин, А. О. Толбей ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2019. – 68 с.

ISBN 978-5-8397-1177-8

В пособии содержатся материалы по курсу «Математическая экономика». Оно включает в себя краткое изложение теоретического материала, основных задач курса и методов их решения, проиллюстрировано подробным разбором.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине «Математическая экономика».

Рис. 5. Библиогр.: 13 назв.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

УДК 330.4(075.8)
ББК В183.5я73+У.в611я73

ISBN 978-5-8397-1177-8

Оглавление

Введение

Пособие для занятий по курсу «Математические модели в экономике» содержит ряд важнейших тем, включающих необходимые теоретические сведения и подробный разбор модельных примеров. Материал разделен на четыре главы.

В первой из них обсуждаются задачи линейного программирования, приводятся необходимые определения и теоремы. Излагаются основные методы решения задач линейного программирования: графический метод решения в случае двумерной задачи и метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод) для общих случаев.

Вторая глава посвящена математическим моделям в финансовых операциях. Рассматриваются простые и сложные процентные ставки, потоки платежей и различные виды рент.

Третья глава посвящена математическим моделям в экономике, рассматриваются принципы их построения. Изучается модель межотраслевого баланса, лежащая в основе современных подходов к экономико-математическому моделированию межотраслевых связей в национальной экономике. Основное внимание уделяется содержанию базовой модели межотраслевого баланса в статическом и динамическом вариантах. Рассматривается классическая модель Неймана, приводятся критерии ее продуктивности.

В четвертой главе представлены основные сведения, касающиеся производственных функций. Для двухфакторных производственных функций даны понятия предельных продуктов труда и капитала, предельной нормы технического замещения капитала трудом. В частности, определение этих показателей подробно проиллюстрировано на производственной функции Кобба-Дугласа. Описываются параметры модели Солоу и примеры их вычисления.

1. Линейное программирование

В главе даны основные определения и теоремы, необходимые для постановки и решения задач линейного программирования. Изложение материала приведено согласно [1, 2].

1.1. Основные определения, теоремы

На практике часто встречаются различные ситуации, когда достичь какого-то результата можно большим количеством различных способов. Выбор наилучшего способа — важная задача. Математически это можно свести к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции.

Определение 1.1. *Задача, в которой требуетя обратить в максимум (минимум) линейную форму*

$$L(X) = (C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.2}$$

$$(A_i, X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = s+1, \ldots, s+t, \tag{1.3}$$

называется общей задачей линейного программирования, заданной в произвольной форме записи.

В матричном виде задачу (1.1)–(1.3) можно представить следующим образом:

$$(C, X) \to \max\,(\min), \tag{1.4}$$

$$AX \leqq B, \tag{1.5}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица размером $n \times (s+t)$,

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n),\ B = (b_1, b_2, \ldots, b_{s+t}),$$

знак $\leqq$ означает, что первые s компонент векторного условия (1.5) являются неравенствами, а последние t являются равенствами.

Определение 1.2. *Задача, в которой требуется найти максимум линейной формы* (1.1) *при условиях* (1.2) *и условиях*

$$x_j \geqslant 0,\ \text{где}\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.6}$$

называется задачей линейного программирования, заданной в симметричной форме записи.

В матричном виде задача в симметричной форме записи имеет вид

$$(C, X) \to \max, \tag{1.7}$$

$$AX \leqslant B, \tag{1.8}$$

$$X \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Определение 1.3. *Задача, в которой требуется найти максимум линейной формы* (1.1) *при условиях* (1.3) *и условиях* (1.6), *называется задачей линейного программирования в канонической форме записи.*

В матричном виде задача в канонической форме записи имеет вид

$$(C, X) \to \max, \tag{1.10}$$

$$AX = B, \tag{1.11}$$

$$X \geqslant 0. \tag{1.12}$$

Определение 1.4. *Набор чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования, называется ее планом.*

Определение 1.5. *План $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, обращающий в максимум (минимум) линейную форму* (1.1), *называется оптимальным планом, или решением задачи линейного программирования.*

Определение 1.6. *Столбцы A_j матрицы A называются векторами условий, а B — вектором ограничений задачи линейного программирования.*

Определение 1.7. *Задача линейного программирования называется допустимой, если множество M планов задачи непусто, и разрешимой, если непусто множество $\overline{M}$ оптимальных планов этой задачи.*

Иногда возникает необходимость привести задачу линейного программирования, заданную в общей форме записи, к канонической форме. Рассмотрим на простых примерах несколько методов, позволяющих выполнить такое преобразование.

Пример 1.1. *Привести к канонической форме записи задачу*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Решение. Для того чтобы первое ограничение записать в форме равенства, введем неотрицательную переменную x_3 ($x_3 \geqslant 0$). Заменим переменную x_2, на значение которой не наложено требование неотрицательности, разностью двух неотрицательных переменных:

$$x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}, \text{ где } x_2^{'}, x_2^{''} \geqslant 0.$$

После этих преобразований исходная задача запишется в канонической форме:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_2^{''} &\to \max, \\ x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2^{'} - x_2{''} &= 2, \\ x_1 \geqslant 0, x_2^{'} \geqslant 0, x_2^{''} \geqslant 0, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

□

Пример 1.2. *Привести задачу*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\to \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 2, \\ x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

к канонической форме.

Решение. Введем дополнительную неотрицательную переменную x_4 ($x_4 \geqslant 0$) и запишем первое ограничение задачи в виде равенства:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1.$$

Исключим из системы равенств переменные x_1 и x_2, не связанные условием неотрицательности. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x1 + \alpha x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Здесь возможны два случая.

Случай 1. $\alpha \neq 2$. Переменные x_1 и x_2 единственным образом выражаются через x_3 и x_4:

$$\begin{aligned} x_1 =& \frac{1}{2-\alpha}\left(2 - \alpha - (\alpha+1)x_3 + \alpha x_4\right), \\ x_2 =& \frac{1}{2-\alpha}(3x_3 - 2x_4). \end{aligned}$$

При подстановке этих значений в линейную форму, задача принимает вид

$$\begin{gathered} 1 + \left(\frac{1+\alpha}{2-\alpha}\right)x_3 - \left(\frac{4-\alpha}{2-\alpha}\right)x_4 \to \max, \\ x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Случай 2. $\alpha = 2$. В этом случае нельзя выразить x_1 и x_2 через x_3 и x_4, но можно исключить одну из этих переменных, например x_1:

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Если подставить найденное выражение для x_1 в линейную форму и оставшиеся ограничения, то задача примет вид

$$\begin{gathered} 1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max, \\ 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Полученная задача в канонической форме неразрешима, так как x_2 входит в линейную форму с ненулевым коэффициентом, но не входит в ограничения. Значит, неразрешима и исходная задача. □

1.2. Графический метод решения задач

Приведем геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования для случая, когда число переменных равно двум.

При $n = 2$ линейная форма задачи имеет вид

$$c_1x_1 + c_2x_2,$$

а множество планов совпадает с выпуклым многогранным множеством M ($M \subset \mathbb{R}^2$) — пересечением прямых, порождаемых ограничениями–равенствами, и полуплоскостей, порождаемых ограничениями–неравенствами. Уравнение

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c \tag{1.13}$$

определяет прямую на плоскости $\mathbb{R}^2$, а вектор $C = (c_1, c_2)$ указывает направление, в котором нужно перемещать прямую (1.13) параллельно самой себе, чтобы значение c возрастало.

Проведем через любую точку $X \in M$ прямую, параллельную (1.13), и будем перемещать ее в направлении возрастания c. При этом возможны два случая.

Случай 1. Существует положение прямой, параллельной (1.13), обладающее тем свойством, что при любом дальнейшем перемещении у множества M и у прямой не будет общих точек (рис. 1, 2). В этом случае задача разрешима.

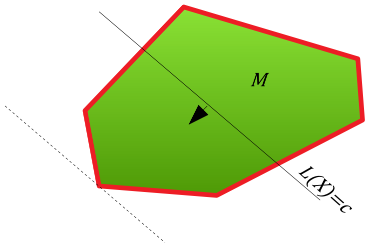

Рис. 1.

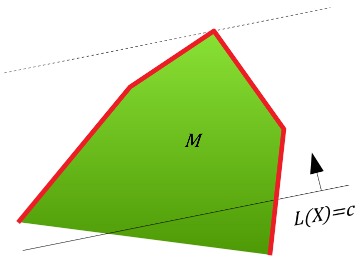

Рис. 2.

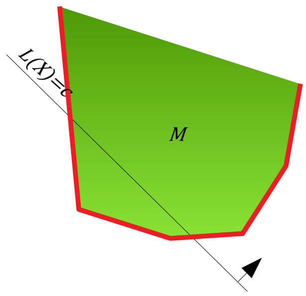

Рис. 3.

Случай 2. Сколько бы в направлении возрастания линейной формы c ни передвигать прямую (1.13), у множества M и у прямой будут оставаться общие точки (рис. 3). В этом случае линейная форма не ограничена сверху на множестве планов задачи, т. е. задача неразрешима.

Пример 1.3. *Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:*

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \max, \\ 6x_1 + 4x_2 \leqslant 24, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Решение. Нарисуем ограничения, заданные неравенствами. На рисунке 4 неравенства определяют выпуклую область M. Направление возрастания линейной формы

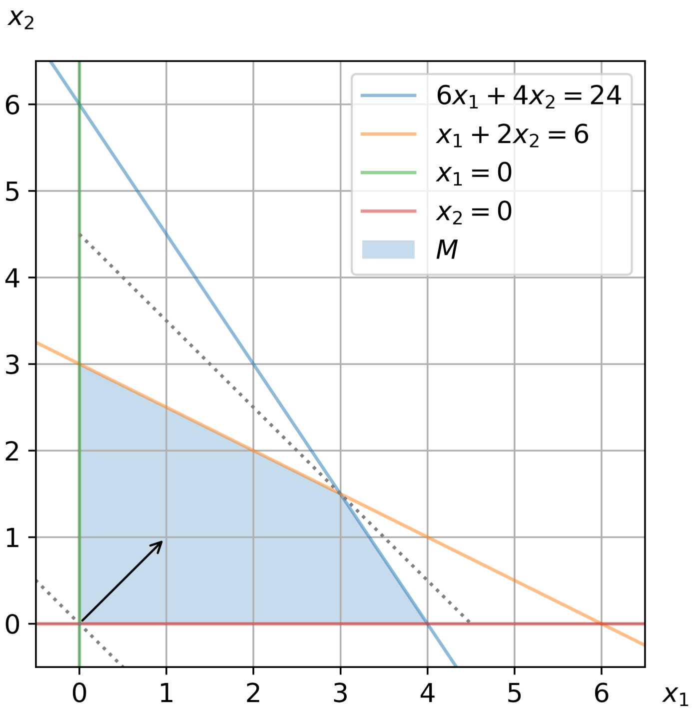

Рис. 4.

отмечено вектором $(1, 1)$, изображенным на рисунке стрелкой. Передвигая прямую в направлении возрастания линейной формы (начальное и конечное положение прямой отмечено на рисунке пунктирной линией), находим последнюю точку пересечения со множеством M. Координаты этой точки $(3, 1.5)$. Подставляя их в линейную форму, получаем ответ: max $= 4.5$.

□

1.3. Метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод)

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме записи:

$$L(X) = (C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.15}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.16}$$

Предположим, что левые части уравнений (1.15) линейно независимы.

Определение 1.8. *План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи* (1.14)–(1.16)*называются опорным, если векторы условий A_i матрицы $\|a_{ij}\|_{m,n}$, отвечающие его положительным составляющим, линейно независимы.*

Определение 1.9. *Система m линейно независимых векторов условий $\{A_{si}\}$ $i = 1, 2, \ldots, m$, включающая все те A_{si}, для которых $x_{si} > 0$, называется базисом опорного плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и обозначается через B_X.*

Определение 1.10. *Опорный план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется невырожденным, если все его компоненты, отвечающие векторам базиса (базисные компоненты), положительны.*

Определение 1.11. *Задача* (1.14)–(1.16) *называется невырожденной, если все ее опорные планы не вырождены.*

Пусть $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ — опорный план задачи (1.14)–(1.16) и $B_X = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}\}$ — его базис. Рассмотрим произвольный вектор условий A_j и разложим его по базису $B_{\overline{X}}$:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_{s_i} x_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично вектор ограничений B, который будем обозначать через A_0, представляется как линейная комбинация векторов базиса с коэффициентами x_{i0} ($i = 1, 2, \ldots, m$):

$$B = A_0 = \sum_{i=1}^{m} A_{s_i} x_{i0}.$$

Образуем наборы параметров z_j и Δ_j (эти параметры однозначно определяются выбором базиса $B_{\overline{X}}$ опорного плана $\overline{X}$):

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.17}$$

$$\Delta_j = z_j - c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.18}$$

Справедливы следующие утверждения относительно опорного плана $\overline{X}$.

Утверждение 1 (Признак оптимальности опорного плана). *Опорный план $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ является решением задачи* (1.14)–(1.16), *если $\Delta_j \geqslant 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Утверждение 2. *Если существует номер $j = k$, для которого $\Delta_k < 0$, а $x_{ik} \leqslant 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$, то линейная форма* (1.14) *не ограничена сверху на множестве планов* (1.15), (1.16).

Утверждение 3. *Пусть план $\overline{X}$ задачи* (1.14)–(1.16) *не вырожден и $\Delta_k < 0$, но не все $x_{ik} \leqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Тогда существует опорный план $\overline{X}' = (\overline{x}'_1, \overline{x}'_2, \ldots, \overline{x}'_n)$, для которого*

$$L(\overline{X}') > L(\overline{X}).$$

Для того чтобы получить базис опорного плана $\overline{X}'$, необходимо ввести в базис $B_{\overline{X}}$ вектор A_k и вывести из базиса $B_{\overline{X}}$ вектор A_{s_r}, где r определяется из условий

$$\theta_0 = \frac{x_{r0}}{x_{rk}} = \min_{x_{ik}>0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}.$$

При этом компоненты «лучшего» опорного плана $\overline{X}'$ определяются из условий

$$x_{i0}' = \begin{cases} x_{i0} - \theta_0 x_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ \theta_0 & \text{при } i = r \end{cases} \tag{1.19}$$

(здесь i — номер позиции вектора A_{s_i} в базисе $B_{\overline{X}}$).

Пример 1.4. *Исследовать на оптимальность план* $\overline{X} = (0, 0, 1, 1)$ *задачи*

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4. \end{gathered}$$

Здесь векторы условий A_j *и вектор ограничений* A_0 *имеют вид*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Опорный план $\overline{X} = (0, 0, 1, 1)$ *не вырожден, и его базис определяется однозначно:* $B_{\overline{X}} = (A_3, A_4)$*, поэтому* $A_{s_1} = A_3$*,* $A_{s_2} = A_4$*.*

Для того чтобы исследовать $\overline{X}$ *на оптимальность, необходимо составить параметры* Δ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$*, а это требует вычисления величин* x_{ij}*. Эти величины можно найти, решая векторные системы:*

$$A_1 = \sum_{i=1}^{2} x_{i1} A_{s_i},\ A_2 = \sum_{i=1}^{2} x_{i2} A_{s_i},\ A_3 = \sum_{i=1}^{2} x_{i3} A_{s_i},\ A_4 = \sum_{i=1}^{2} x_{i4} A_{s_i}.$$

Так как векторы A_{s_1} *и* A_{s_2} *единичные, то матрица* $\|x_{ij}\|_{2,4}$ *совпадает с матрицей условий задачи* $\|a_{ij}\|_{2,4}$*:*

$$\|x_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда параметры z_j *и* Δ_j *находятся по формулам* (1.17), (1.18)*:*

$$\begin{gathered} z_1 = c_3 x_{11} + c_4 x_{21} = 1,\ \Delta_1 = z_1 - c_1 = 2, \\ z_2 = c_3 x_{21} + c_4 x_{22} = 4,\ \Delta_2 = z_2 - c_2 = 5, \\ z_3 = c_3 x_{31} + c_4 x_{23} = 2,\ \Delta_3 = z_3 - c_3 = 0, \\ z_4 = c_3 x_{41} + c_4 x_{24} = 3,\ \Delta_4 = z_4 - c_4 = 0. \end{gathered}$$

Все $\Delta \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$*, поэтому план* $\overline{X} = (0, 0, 1, 1)$ *есть решение задачи.*

Пример 1.5. *Исследовать на оптимальность план* $\overline{X} = (0, 1, 0, 2, 1)$ *задачи*

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \to \max, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 3, \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, 5. \end{gathered}$$

В этом примере базис опорного плана $\overline{X}$ состоит из векторов A_2, A_4, A_5.

Для того чтобы пользоваться формулами (1.17), (1.18), *необходимо положить*

$$A_{s_1} = A_2,\ A_{s_2} = A_4,\ A_{s_3} = A_5,$$

т. е.

$$s_1 = 2,\ s_2 = 4,\ s_3 = 5.$$

Параметры x_{ij} находим из векторных систем

$$A_1 = \sum_{i=1}^{3} x_{i1} A_{s_i} \text{ и } A_3 = \sum_{i=1}^{3} x_{i3} A_{s_i}.$$

Очевидно, что $x_{i2} = (1,0,0)$, $x_{i4} = (0,1,0)$, $x_{i5} = (0,0,1)$. Легко проверить, что векторные системы имеют следующие решения:

$$x_{i1} = (-1,-1,1) \text{ и } x_{i3} = (1,2,-2).$$

Поэтому матрица $\|x_{ij}\|$ имеет вид

$$\|x_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а параметры Δ_j таковы:

$$\Delta_1 = -2,\ \Delta_2 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0,\ \Delta_3 = 1.$$

Так как в первом столбце матрицы $\|x_{ij}\|$, соответствующем $\Delta_1 < 0$, имеется положительный член $x_{31} = 1$, то можно воспользоваться утверждением 3 и получить новый опорный план $\overline{B}'$, связанный с большим значением линейной формы задачи (план $\overline{X}$ не вырожден).

Базис $B_{\overline{X}'}$ можно получить, если в базис $B_{\overline{X}}$ ввести вектор A_1 и вывести вектор A_{s_r}, где r определяется из условий

$$\theta_0 = \frac{x_{r0}}{x_{r1}} = \min_{x_{i_1}>0} \frac{x_{i0}}{x_{i1}}.$$

В этом примере $r = 3$, $\theta_0 = 1$. Значит, базис нового опорного плана $B_{\overline{X}'}$ состоит из векторов A_2, A_4, A_1. Согласно нашим обозначениям $A_2 = A_{s_1}$, $A_4 = A_{s_2}$, $A_1 = A_{s_3}$. Из формул (1.19) *находим компоненты нового опорного плана x_{i0}:*

$$\begin{aligned} x'_{10} &= x_{10} - \theta_0 x_{11} = 2, \\ x'_{20} &= x_{20} - \theta_0 x_{21} = 3, \\ x'_{30} &= \theta_0 = 1. \end{aligned}$$

Значит, $\overline{X}' = (1,2,0,3,0)$.

Исследуя план $\overline{X}'$ по аналогичной схеме, получим матрицу $\|x'_{ij}\|$ и значения Δ'_j:

$$\|x'_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta'_1 = \Delta'_2 = \Delta'_4 = 0,\ \Delta'_3 = -3,\ \Delta'_5 = 2.$$

Так как $\Delta'_3 = -3 < 0$, а все $x_{i3} \leqslant 0$ $(i = 1,2,3)$, то из утверждения 1 следует неограниченность сверху линейной формы на множестве планов задачи.

Пусть X — некоторый опорный план задачи линейного программирования (1.14)–(1.16) с базисом B_X. В результате исследования, основанного на утверждениях 1–3, выявляется:

- либо оптимальность плана X;
- либо неразрешимость задачи;
- либо возможность перехода к новому плану X_1 (точнее, к новому базису B^1), связанному с большим значением линейной формы $L(X)$.

Последовательное продвижение по базисам опорных планов задачи вплоть до получения оптимального базиса (базиса, соответствующего оптимальному плану задачи) составляет идею метода последовательного улучшения плана.

Для реализации этого метода необходимо знать следующие параметры:

- базисные компоненты x_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ исследуемого опорного плана:
- элементы матрицы $\|x_{ij}\|_{m,n}$;
- оценки векторов условий Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, которые обозначаются через $x_{m+1,j}$;
- значение линейной формы $L(X)$, соответствующее исследуемому опорному плану X. Величина $L(X)$ обозначается через $x_{m+1,0}$.

Рассмотрим базис B^1, состоящий из векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_r}, \ldots, A_{s_m}$, и базис $B^2 = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_k, \ldots, A_{s_m}\}$ (базис B^2 отличается от базиса B^1 тем, что вектор A_{s_r} заменен вектором A_k). Параметры $x_{ij}^{(1)}$ и $x_{ij}^{(2)}$, соответствующие этим базисам, связаны соотношениями

$$x_{ij}^{(2)} = \begin{cases} x_{ij}^{(0)} - \frac{x_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}} & \text{при } i \neq r, \\ \frac{x_{rj}^{(1)}}{x_{rk}^{(1)}} & \text{при } i = r, \end{cases} \tag{1.20}$$

$i = 1, 2, \ldots, m + 1$; $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Описание алгоритма:

I. Нулевая итерация. Заполняется таблица 1, соответствующая исходному опорному плану X_0 с базисом B_{X_0}.

В первый столбец «№» таблицы записываются номера строк таблицы: $1, 2, \ldots, m + 1$.

В столбец «C_{X_0}» вносятся базисные компоненты c_{si} вектора C; $m + 1$-я позиция этого столбца не заполняется.

Столбец «B_X» содержит векторы базиса A_{s_i}.

Столбцы «A_j» $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ заполняются параметрами $x_{ij}^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$.

Столбец «$\Delta^{(0)}$» в нулевой итерации не заполняется.

II. $(l + 1)$-я итерация (переход от таблицы с номером «l» к таблице с номером «$l + 1$»).

Пусть заполнена таблица с номером «l», за исключением столбца «$\Delta^{(l)}$». Рассмотрим элементы $(m + 1)$-й строки этой таблицы, соответствующие столбцам «A_j». Так как $x_{m+1,j}^{(l)} = \Delta_j^{(l)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то здесь возможны три случая:

Таблица 1. Нулевая итерация

№	C_{X_0}	B_{X_0}	A_0	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	$\cdots$	A_n	$\Delta^{(0)}$
1	c_{s1}	A_{s_1}	$x_{10}^{(0)}$	$x_{11}^{(0)}$	$x_{12}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{1k}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{1n}^{(0)}$	
2	c_{s2}	A_{s_2}	$x_{20}^{(0)}$	$x_{21}^{(0)}$	$x_{22}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{2k}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{2n}^{(0)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	c_{sr}	A_{s_r}	$x_{r0}^{(0)}$	$x_{r1}^{(0)}$	$x_{r2}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{rk}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{rn}^{(0)}$	$\Delta_{\min}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{sm}	A_{s_m}	$x_{m0}^{(0)}$	$x_{m1}^{(0)}$	$x_{m2}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{mk}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{mn}^{(0)}$	
$m+1$	—	—	$L^{(0)}$	$\Delta_1^{(0)}$	$\Delta_2^{(0)}$	$\cdots$	$\Delta_k^{(0)}$	$\cdots$	$\Delta_n^{(0)}$	

1) все $\Delta_j^{(l)} \geqslant 0$; тогда опорный план X_l, полученный после l-й итерации, — решение задачи;

2) $\Delta_k^{(l)} < 0$ и все элементы столбца «A_k» $x_{ik}^{(l)} \leqslant 0$; в этом случае задача неразрешима;

3) в каждом столбце «A_k», для которого $\Delta_k^{(l)} < 0$, имеется хотя бы один положительный элемент. В этом случае в базис вводится один из векторов A_k (для определенности будем считать, что вводится вектор A_k с наименьшей оценкой $\Delta_k^{(l)}$). Столбец «A_k» таблицы l называется направляющим. Для определения вектора A_{s_i}, который нужно вывести из базиса, заполняется столбец «$\theta^{(l)}$» l-й таблицы, точнее, те его позиции, которые соответствуют $x_{ik}^{(l)} > 0$: $\theta_i^{(l)} = \frac{x_{i0}^{(l)}}{x_{ik}^{(l)}}$.

Вектор A_{s_r}, на котором достигается $\min \theta^{(l)}$, выводится из базиса. В случае когда задача вырождена, $\min \theta^{(l)}$ может соответствовать сразу нескольким векторам. При этом из базиса можно вывести любой из этих векторов. Строка r таблицы называется направляющей. Элемент $x_{rk}^{(l)}$ называется направляющим.

После определения направляющего элемента заполняется таблица с номером «$l+1$».

Заполнение «$l+1$»-й таблицы:

- Первые три столбца «$l+1$»-й таблицы отличаются от «l»-й таблицы строкой с номером r. Вместо элементов r, c_{s_r}, A_{s_r} заносятся элементы r, c_k, A_k.

- Заполняется «основная» часть таблицы.

Чтобы получить r-ю строку «$l+1$»-й таблицы, нужно r-ю строку «l»-й таблицы разделить на $x_{rk}^{(l)}$. Для получения строки $i \neq r$ «$l+1$»-й таблицы нужно из i-й строки «l»-й таблицы вычесть r-ю строку «$l+1$»-й таблицы, умноженную на $x_{ik}^{(l)}$. Всюду действия со строками таблицы понимаются как действия с векторами, компоненты которых совпадают с элементами строк.

Этим завершается $l+1$-я итерация.

Так как вычисление параметров $\Delta_j^{(0)}$ осуществляется не по рекуррентным формулам (1.20), а непосредственно, то для таблицы с номером «0» удобно ввести окаймляющую сверху строку «C», в которую заносятся коэффициенты линейной формы задачи. Тогда $(m+1)$-ю строку «нулевой» таблицы можно получить как разность произведения столбцов «A_j» на «C_X» и строки «C».

Рассмотрим вычислительный пример, иллюстрирующий порядок действий по описанному алгоритму.

Пример 1.6. *Решить задачу линейного программирования методом последовательного улучшения плана:*

$$
\begin{gathered}
2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max, \\
x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\
2x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\
x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.
\end{gathered}
$$

Решение. Естественно в качестве исходного базиса рассмотреть базис $B_X^{(0)} = (A_3, A_4)$, соответствующий опорному плану $X = (0, 0, 1, 3)$. Таблица, соответствующая нулевой итерации, имеет вид, представленный в таблице 2.

Таблица 2. Нулевая итерация

				2	1	1	-1	
№	C_B	B_X	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\theta^{(0)}$
1	1	A_3	1	1	-1	1	0	1
2	-1	A_4	3	2	1	0	1	3/2
3	—	—	-2	-3	-3	0	0	

Среди оценок Δ_j векторов условий имеются отрицательные: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, причем в разложении каждого из векторов с отрицательными оценками есть положительные составляющие: $x_{11} > 0$, $x_{22} > 0$. Поэтому можно воспользоваться рекомендациями третьего пункта и перейти к новому базису B_X^1. Так как $\Delta_1{=}\Delta_2{<}0$, то в базис вводится один из векторов A_1 или A_2, пусть это будет вектор A_1. Для определения вектора A_{s_i} $(i = 1, 2)$, который нужно вывести из базиса, заполним столбец «$\theta^{(0)}$». Здесь $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = (1, 3/2)$, поэтому из базиса выводится вектор A_3. Теперь можно построить таблицу 3, соответствующую первой итерации.

Таблица 3. Первая итерация

№	C_B	B_X	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\theta^{(1)}$
1	2	A_1	1	1	-1	1	0	—
2	-1	A_4	1	0	3	-2	1	1/3
3	—	—	1	0	-6	3	0	—

Из таблицы 3 видно, что улучшение плана можно продолжить, если перейти к базису $B_X^2 = (A_1, A_2)$ (так как $\Delta_2^{(1)} < 0$ и $\theta_{\min}^{(1)} = \theta_2^{(1)}$). Таблица, соответствующая этому базису, имеет вид таблицы 4.

Так как $\Delta_3^{(2)} = -1 < 0$, а $\theta_{\min}^{(2)} = \theta_1^{(2)}$, то переходим к базису $B_X^{(3)} = (A_3, A_2)$ и строим соответствующую ему таблицу 5.

Таблица 4. Вторая итерация

№	C_B	B_X	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\theta^{(2)}$
1	2	A_1	$4/3$	1	0	$1/3$	$1/3$	4
2	1	A_2	$1/3$	0	1	$-2/3$	$1/3$	—
3	—	—	3	0	0	-1	2	—

Таблица 5. Третья итерация

№	C_B	B_X	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1	A_3	4	3	0	1	1
2	1	A_2	3	2	1	0	1
3	—	—	7	3	0	0	3

Так как все $\Delta_j^{(3)} \geqslant 0$, то базис $B_X^{(3)}$ является оптимальным. В соответствии с последней таблицей получаем

$$\overline{X} = (0, 3, 4, 0),\ L(\overline{X}) = 7.$$

$\square$

Рассмотрим вместе с основной задачей

$$\begin{cases} L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ b_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{1.21}$$

вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \widetilde{L}(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+m. \end{cases} \tag{1.22}$$

Очевидно, что $\widetilde{X}_0 = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ является опорным планом вспомогательной задачи. Поэтому если его взять в качестве начального опорного плана и применить метод последовательного улучшения плана, то можно решить вспомогательную задачу.

Утверждение 4. *Задача* (1.22) *всегда разрешима. При этом* $\max \widetilde{L}(\widetilde{X}) \leqslant 0$.

Утверждение 5. *Если* $\widetilde{L}(\widetilde{X}) = 0$ *и достигается на векторе* $\widetilde{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, *то вектор* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является опорным планом задачи* (1.22).

Утверждение 6. *Если* $\widetilde{L}(\widetilde{X}) < 0$, *то система условий задачи* (1.22) *противоречива.*

Метод определения исходного опорного плана основной задачи, основанный на решении вспомогательной задачи, называется методом искусственного базиса. Исходный базис вспомогательной задачи $B_{\widetilde{X}_0} = \{A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}\}$ состоит из искусственных векторов.

Пример 1.7. *Решить задачу, определяя исходный опорный план методом искусственного базиса:*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &\to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 &= 0, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. *Решим вспомогательную задачу*

$$\begin{aligned} -x_4 - x_5 &\to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + x_5 &= 0, \\ x_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

План $\widetilde{X}_0 = (0, 0, 0, 3, 0)$ *является опорным планом. Последовательность таблиц симплекс-метода будет следующей.*

Таблица 6. Нулевая итерация

№	C_B	B_X	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\theta^{(0)}$
1	-1	A_4	3	1	-1	1	1	0	3/1
2	-1	A_5	0	2	-5	-1	0	1	0
3	—	—	-3	-3	6	0	0	0	—

Таблица 7. Первая итерация

№	C_B	B_X	A_0	A_5	A_2	A_3	A_4	A_5	$\theta^{(1)}$
1	-1/2	A_4	3	0	3/2	3/2	1	-1/2	2
2	-1/2	A_1	0	1	-5/2	-1/2	0	1/2	0
3	—	—	-3	0	-3/2	-3/2	0	3/2	—

Подставим $(5, 2, 0)$ *в изначальную задачу и найдем* $\max = 13$.

□

1.4. Двойственные задачи

Рассмотрим общую задачу линейного программирования, заданную в произвольной форме записи

$$L(X) = (C, X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1.23}$$

Таблица 8. Вторая итерация

№	C_B	B_X	A_0	A_5	A_4	A_3	A_4	A_5	$\theta^{(2)}$
1	-1/3	A_2	2	0	1	1	2/3	-1/3	—
2	-4/3	A_1	5	1	0	2	5/3	-1/3	—
3	—	—	0	0	0	0	1	1	—

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_1,\ m_1 \leqslant m, \tag{1.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2 \ldots, m, \tag{1.25}$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n_1,\ n_1 \leqslant n. \tag{1.26}$$

Определение 1.12. *Задача линейного программирования*

$$\widetilde{L}(Y) = (C, X) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{1.27}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n_1,\ n_1 \leqslant n, \tag{1.28}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j,\ j = n_1 + 1, n_1 + 2 \ldots, n, \tag{1.29}$$

$$y_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m_1,\ m_1 \leqslant m, \tag{1.30}$$

называется двойственной по отношению к задаче (1.23)–(1.26).

Двойственная по отношению к задаче образуется по следующему правилу:

- задача (1.27)–(1.30) является задачей минимизации, в которой вектор линейной формы $\widetilde{L}(Y)$ совпадает с вектором ограничений исходной задачи. Аналогично связаны между собой векторы линейной формы исходной задачи и ограничений двойственной задачи.

- матрица условий двойственной задачи образуется транспонированием матрицы условий исходной задачи.

- установленное взаимно однозначное соответствие между переменными исходной задачи и условиями двойственной удовлетворяет следующему требованию: j-е условие двойственной задачи будет неравенством, если на j-ю переменную исходной задачи наложено требование неотрицательности, в противоположном случае j-е условие будет равенством; аналогично связаны между собой условия исходной задачи и переменные двойственной.

Пример 1.8.

$$
\begin{aligned}
L(X) = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \to \max,\\
2x_1 - x_2 \leqslant 1,\\
x_1 - x_2 + 2_x3 - x_4 + x_5 \geqslant 4,\\
x_2 + x_3 - x_4 = 0,\\
x_1 - x_3 + 2_x5 \geqslant 3,\\
x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Приведем систему ограничений к виду (1.24)–(1.26)*:*

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \leqslant 1,\\
-x_1 + x_3 - 2_x5 \leqslant -3,\\
-x_1 + x_2 - 2_x3 + x_4 - x_5 \leqslant -4,\\
x_2 + x_3 - x_4 = 0,\\
x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Теперь воспользуемся определением 1.12 и запишем задачу, двойственную по отношению к данной:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}(Y) = y_1 - 3y_2 - 4y_3 \to \min,\\
2y_1 - y_2 - y_3 \geqslant 1,\\
-y_1 + y_3 + y_4 = -10,\\
y_2 - 2y_3 + y_4 \geqslant 2,\\
y_3 - y_4 = -1,\\
-2y_2 - y_3 = 7,\\
y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

2. Математические модели в финансовых операциях

В главе рассматриваются простые и сложные процентные ставки наращения, а также приводятся основные сведения о потоках платежей. При изложении материала главы используется [3].

2.1. Проценты и процентные ставки

При анализе финансовых операций основополагающим принципом является неравноценность денег во времени. Стоимость рубля сегодня больше стоимости рубля в будущем. В связи с этим в долгосрочных финансовых операциях учитываются и размеры денежных сумм, и фактор времени.

Если в настоящее время один рубль можно инвестировать под заданный процент на заданный период, то по прошествии этого периода инвестор получит один рубль плюс процент.

Определение 2.1. *Проценты — это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме.*

Определение 2.2. *Наращенная сумма ссуды — это первоначальная сумма плюс начисленные к концу срока ссуды проценты.*

Если S — наращенная сумма ссуды, P — первоначальная сумма ссуды, I — начисленные к концу срока ссуды проценты, то нараценню сумму ссуды можно выразить следующей формулой:

$$S = P + I. \tag{2.1}$$

Определение 2.3. *Процентная ставка наращения — это отношение процентов за год к сумме долга.*

Процентная ставка является измерителем степени доходности любой финансовой операции. В этом случае процентная ставка называется доходностью.

Рассмотрим простую процентную ставку наращения.

Определение 2.4. *Простая процентная ставка наращения — это ставка, при которой база начисления всегда остается постоянной.*

Если I — проценты за весь срок ссуды, n — срок ссуды в годах, i — простая годовая ставка наращения, то

$$I = Pni. \tag{2.2}$$

Подставив (2.2) в (2.1), получим формулу простых процентов:

$$S = P(1 + ni). \tag{2.3}$$

Множитель $q = 1 + ni$ называется множителем наращения простых процентов.

Пример 2.1. *Ссуда в размере* 2 500 000 *рублей выдана на срок* 0.7 *года под простые проценты –* 18 % *годовых. Определить проценты и наращенную сумму.*

Решение. Воспользуемся формулами (2.1) и (2.2). $I = Pni = 2\,500\,000 \cdot 0.7 \cdot 0.18 = 315\,000$ руб., $S = P + I = 2\,500\,000 + 315\,000 = 2\,815\,000$ руб. □

Если t — число дней ссуды, K — временная база или число дней в году, то срок ссуды рассчитывается по формуле

$$n = \frac{t}{K}. \tag{2.4}$$

Существует несколько общепринятых временных баз. Первая — обыкновенные проценты, где $K = 360$. Вторая — точные проценты, где $K = 365$ или $K = 366$ в зависимости от количества дней в году.

При расчете срока ссуды при начислении по простым процентам могут быть использованы следующие методы:

- точные проценты с точным числом дней ссуды — 365/365. Количество дней ссуды рассчитывается точно по календарю. Первый и последний дни ссуды принимаются за один. $K = 365$;

- обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды — 365/360. Количество дней ссуды рассчитывается точно по календарю. Первый и последний дни ссуды принимаются за один. $K = 360$;

- обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды — 360/360. Количество дней в каждом месяце принимается равным 30. $K = 360$.

Пример 2.2. *Ссуда в размере* 8 000 000 *рублей выдана 28 января по 15 июня включительно под простые проценты –* 15 % *годовых. Тремя методами определить величину долга в конце срока ссуды. Считать, что в феврале 28 дней.*

Решение.

- 365/365. $t = 4 + 28 + 31 + 30 + 31 + 15 - 1 = 138$ дней, $n = 138/365 = 0.37808219$, $S = 8\,000\,000 \cdot (1 + 0.37808219 \cdot 0.15) = 8\,453\,698.63$ руб.

- 365/360. $t = 4 + 28 + 31 + 30 + 31 + 15 - 1 = 138$ дней, $n = 138/360 = 0.38333333$, $S = 8\,000\,000 \cdot (1 + 0.38333333 \cdot 0.15) = 8\,460\,000.00$ руб.

- 360/360. $t = 3 + 4 \cdot 30 + 15 - 1 = 137$ дней, $n = 137/360 = 0.38055556$, $S = 8\,000\,000 \cdot (1 + 0.38055556 \cdot 0.15) = 8\,456\,666.67$ руб.

□

Если $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — интервалы времени, следующие друг за другом, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — ставки, изменяющиеся во времени и соответствующие этим интервалам, то наращенная сумма может быть вычислена по формуле

$$S = P(1 + \sum_{j=1}^{k} n_j i_j).$$

Рассмотрим сложные процентные ставки наращения.

Определение 2.5. *Сложная процентная ставка наращения — ставка, при которой база начисления является переменной, т. е. проценты начисляются на проценты.*

Инвестируя каждый год сумму в P руб. вместе с полученными за год на нее процентами по процентной ставке i, получим в первый год $P(1+i)$ руб., во второй год – $P(1+i)(i+i)$ руб., в третий – $P(1+i)(1+i)(1+i)$ руб. и т. д. Таким образом, формула сложных процентов имеет вид:

$$S = P(1+i)^n, \tag{2.5}$$

где n — число лет инвестирования.

Пример 2.3. *Какой величины достигнет долг, равный* 20 000 *руб., через 5 лет при росте по сложной ставке наращения* 16.9 % *годовых?*

Решение. Воспользуемся формулой (2.5): $20\,000 \cdot (1+0.169)^5 = 43\,661.89$ руб. □

При наращении по сложным процентам наращенная сумма быстро растет с увеличением числа лет. На рисунке 5 представлена зависимость множителя наращения $(1+i)^n$ от числа лет для разных значений ставки.

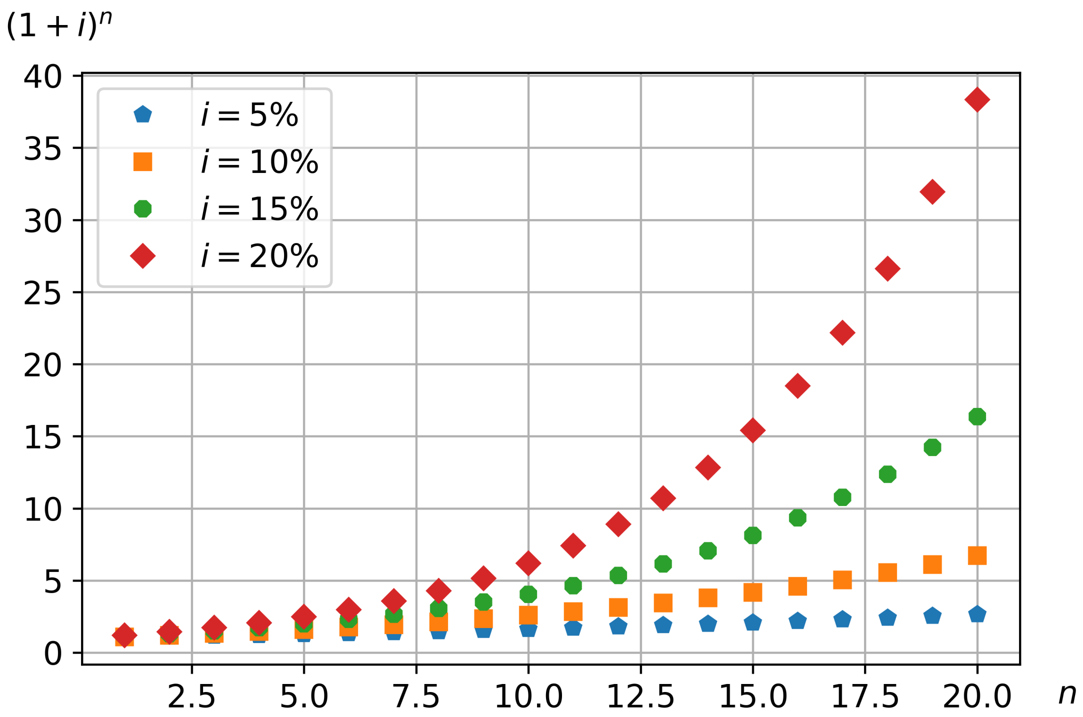

Рис. 5.

Если срок для начисления процентов является дробным числом, то для расчета наращенной суммы можно использовать как общий метод расчета по формуле (2.5), так и смешанный. При использовании смешанного метода дробное число лет представляется в виде суммы целого числа лет α и его дробной части β. Наращенная сумма в этом случае определяется формулой

$$S = P(1+i)^{\alpha}(1+\beta i).$$

Пример 2.4. *Какой величины достигнет долг, равный* 20 000 *руб., через* 2.7 *года при росте по сложной ставке наращения* 16.9 % *годовых? Вычислить двумя методами.*

Решение. Первый метод: $20\,000 \cdot (1+0.169)^{2.7} = 30\,488.02$ руб. Второй метод: $20\,000 \cdot (1+0.169)^2 \cdot (1+0.7 \cdot 0.169) = 30\,564.50$ руб. □

В финансовых операциях в качестве периода наращения процентов можно использовать также месяц, квартал или любой другой период. В этом случае говорят, что проценты начисляются m раз в году. При этом в контрактах фиксируется годовая ставка, которая в этом случае называется номинальной. Сложная процентная ставка наращения является частным случаем номинальной ставки. Если номинальную ставку обозначить через j, то проценты за один период начисляются по ставке j/m, а количество начислений равно mn. Наращенная сумма при использовании номинальной процентной ставки наращения определяется по формуле

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \tag{2.6}$$

Пример 2.5. *Какой величины достигнет долг, равный* 20 000 *руб., через* 2.7 *года при росте по сложной ставке наращения* 16.9 % *годовых, если начисление процентов происходит 1) раз в году 2) помесячно?*

Решение. 1) $20\,000 \cdot (1+0.169)^{2.7} = 30\,488.02$ руб.
2) $20\,000 \cdot (1+\frac{0.169}{12})^{12 \cdot 2.7} = 31\,464.16$ руб. □

Если в формуле (2.6) периоды начисления уменьшать, то количество этих периодов будет увеличиваться. В пределе при стремлении длительности периодов к нулю их число стремится к бесконечности. В этом случае начисление процентов называют непрерывным, а процентную ставку называют силой роста. Сила роста используется при анализе сложных финансовых проблем, например при анализе характеристик ценных бумаг.

Сила роста может меняться во времени. В этом случае она называется переменной, иначе — постоянной. Формула для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов для постоянной силы роста σ при стремлении m к бесконечности имеет вид:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\exp(jn) = P\exp(\sigma n). \tag{2.7}$$

Связь дискретных ставок i и j с силой роста σ определяют следующие равенства: $i = \exp(\sigma) - 1$ и $j = m(\exp(\sigma/m) - 1)$.

Пример 2.6. *На сумму* 15 000 *руб. начисляются проценты по сложной годовой ставке* $i = 22\,\%$ *в течение* 3.5 *лет. Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.*

Решение. Сила роста равна $\sigma = \ln(1+0.22) = 0.19885084 = 19.885084\,\%$. Наращенная сумма при непрерывном начислении: $S = 15\,000\exp(0.19885084 \cdot 3.5) = 30\,085.04$ руб. Наращенная сумма при дискретном начислении: $S = 15\,000(1+0.22)^{3.5} = 30\,085.04$ руб. □

Если переменная сила роста изменяется во времени $\sigma_t = f(t)$, то наращенная сумма определяется соотношением:

$$S = P\exp\left(\int_0^n \sigma_t dt\right).$$

При дисконтировании суммы S, которая будет выдана через срок n по ставке дисконтирования i, вычисляется современная величина (стоимость) P суммы S. Для рассмотренных типов процентов получаем:

$$P = \frac{S}{1+ni}, \quad P = \frac{S}{(1+i)^n}, \quad P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}, \quad P = S\exp(-\sigma n). \tag{2.8}$$

Множители $(1+ni)^{-1}$,$(1+i)^{-n}$, $(1+j/m)^{-mn}$, $\exp(-\sigma n)$ называются дисконтными множителями. А разность между S и P называется дисконтом с суммы S.

Рассмотрим вопрос учетных ставок.

Банк может учесть вексель до наступления срока платежа с дисконтом, т. е. купить его у владельца по цене, которая меньше номинала S, указанного в векселе. Размер дисконта D при учете по простой процентной учетной ставке d за срок n от момента учета до момента погашения задается формулой

$$D = Snd.$$

Отсюда можно получить формулу для расчета суммы, выплачиваемой владельцу векселя, с учетом простой процентной ставки

$$P = S(1 - nd). \tag{2.9}$$

Множитель $1 - nd$ называется дисконтным множителем. При расчетах обычно применяют $K = 360$.

При использовании сложной учетной ставки каждый раз данная ставка применяется не к первоначальной сумме, а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге по времени. Поэтому сумма, выдаваемая банком при учете векселя, со сложной процентной ставкой d рассчитывается по формуле

$$P = S(1 - d)^n. \tag{2.10}$$

Пример 2.7. *Вексель на сумму 20 000 руб., срок по которому наступит через* 1.8 *года, учтен по сложной процентной ставке* 18 % *годовых. Определить сумму, получаемую владельцем векселя при учете, и дисконт при ежегодном и ежемесячном дисконтировании.*

Решение. При ежегодном дисконтировании: $P = 20\,000 \cdot (1 - 0.18)^1.8 = 13\,992.49$ руб., $D = 20\,000 - 13\,992.49 = 6\,007.51$ руб. При ежемесячном дисконтировании: $P = 20\,000 \cdot (1 - 0.18/12)^{12\cdot 1.8} = 14\,429.52$ руб., $D = 20\,000 - 14\,429.52 = 5\,570.48$ руб. □

Рассмотрим вопрос с определением срока ссуды и величины процентной ставки.

Формулы для определения срока ссуды и величины процентной ставки при начислении по простым процентам можно представить в следующем виде:

$$n = \frac{S/P - 1}{i}, \quad i = \frac{S/P - 1}{n}. \tag{2.11}$$

Формулы для определения срока ссуды и величины процентной ставки при начислении по сложным процентам можно представить в следующем виде:

$$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}, \quad i = (S/P)^{-n} - 1. \tag{2.12}$$

Перейдем к вопросу эквивалентности процентных ставок.

Определение 2.6. *Эквивалентными процентными ставками называются любые две из рассмотренных ранее (простая процентная ставка наращения, сложная процентная ставка наращения, номинальная процентная ставка наращения, сила роста, простая учетная ставка, сложная учетная ставка), которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т. е. отношения сторон в рамках одной финансовой операции не изменяются.*

Определим условие эквивалентности между простой и сложной процентными ставками наращения. Для этого полагаем, что начальные и наращенные суммы при применении рассматриваемых ставок одинаковы. Приравняем их множители наращения:

$$1 + ni = (1 + a)^n.$$

Здесь i и a — простая и сложная ставки наращения соответственно. Выразим из этого уравнения ставки наращения и получим

$$a = \sqrt[n]{1 + ni}, \quad i = \frac{(1 + a)^n - 1}{n}.$$

Найдем соотношения эквивалентности между номинальной процентной ставкой наращения j и сложной процентной ставкой наращения a. В этом случае сложная процентная ставка наращения называется эффективной ставкой процентов.

Определение 2.7. *Эффективная ставка процентов — это годовая ставка сложных процентов при начислении раз в году, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m.*

Приравняем их множители наращения и получим

$$(1 + a)^n = (1 + j/m)^{mn}.$$

Выразив из этого уравнения a и j, получим

$$a = (1 + j/m)^m, \quad j = m(\sqrt[m]{1 + a} - 1).$$

Соотношение эквивалентности между номинальной процентной ставкой наращения j и силой роста σ определяется из соотношения

$$\exp(\sigma n) = (1 + j/m)^{mn}.$$

Отсюда

$$\sigma = m \ln(1 + j/m), \quad j = m(\exp(\sigma/m) - 1).$$

Эквивалентность процентных ставок для любых двух рассмотренных в данной главе ставок определяется аналогичным образом.

2.2. Потоки платежей

Определение 2.8. *Потоки платежей — это платежи, последовательные во времени.*

К потокам платежей относятся выплаты по купонам облигаций, пенсии и т. д.

Определение 2.9. *Регулярный поток платежей (финансовая ренат, аннуитет) — платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону (например, поступления), а интервалы (периоды) между платежами одинаковы.*

Определение 2.10. *Нерегулярный поток платежей — платежи, у которых часть выплат является положительными величинами (поступлениями), а другая часть — отрицательными величинами (выплаты сторонним организациям). Интервалы между платежами в этом случае могут быть не равны друг другу.*

Определение 2.11. *Наращенная сумма потока платежей — это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами.*

Определение 2.12. *Современная стоимость потока платежей — это сумма всех выплат, дисонтированных на начало срока данного потока по сложной процентной ставке.*

Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_K$ — ряд платежей, имеющих знак «+» или «−», $k = 1, 2, \ldots, K$, K — количество выплат, t_k — время выплаты под номером k, t_K — общий срок выплат, i — сложная процентная ставка наращения, начисляемая один раз в году. Выплаты производятся в конце периода. В соответствии с определением наращенная сумма потока платежей рассчитывается по формуле

$$S = \sum_{k=1}^{K} R_k (1+i)^{t_K - t_k}. \tag{2.13}$$

Современная стоимость потока платежей определяется соотношением

$$A = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}. \tag{2.14}$$

Наращенная сумма потока платежей и современная стоимость потока платежей связаны соотношением

$$S = A(1+i)^{t_k}. \tag{2.15}$$

Пример 2.8. *Имеется следующий график платежей во времени:*

- *01.01.2018 г. — 20 000 руб.;*
- *01.07.2018 г. — 30 000 руб.;*
- *01.01.2019 г. — 10 000 руб.;*
- *01.01.2020 г. — 40 000 руб.*

Определите сумму задолженности на 01.01.2020 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращения 15 % *годовых.*

Решение. Применим формулу (2.13): $S = 20\,000 \cdot 1.15^2 + 30\,000 \cdot 1.15^{1.5} + 10\,000 \cdot 1.15 + 40\,000 = 114\,947.13$ руб. Применим формулу (2.14): $A = 20\,000 + 30\,000/1.15^{0.5} + 10\,000/1.15 + 40\,000/1.15^2 = 86\,916.54$ руб. □

2.3. Ренты

Рассмотрим годовую ренту.

Определение 2.13. *Постоянная рента — рента, выплаты которой не изменяются во времени.*

По моменту выплат в пределах между началом и концом периода ренты делятся на:

- постнумерандо (обыкновенные) — выплаты производятся в конце периода;
- пренумерандо — выплаты производятся в начале периода;
- ренты с платежами в середине периода.

Далее рассматривать будем ренты постнумерандо. Годовая рента постнумерандо предусматривает выплаты и начисления процентов один раз в конце года.

Определим наращенную сумму годовой ренты. Пусть в течение n лет в банк в конце года вносится R руб., на которые начисляются сложные проценты по ставке $i\,\%$ годовых. Таким образом, на первый взнос проценты начисляются $n-1$ год, на второй — $n-2$ года и т. д. Наращенная сумма к концу срока будет

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) + R = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (2.16)$$

Множитель $s_{n;i} = ((1+i)^n - 1)i^{-1}$ называется коэффициентом наращения ренты.

Для определения современной стоимости годовой ренты необходимо каждый платеж продисконтировать на начало срока ренты и сложить все дисконтированные платежи:

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.17)$$

Множитель $a_{n;i} = (1-(1+i)^{-n})i^{-1}$ называется коэффициентом приведения ренты.

Пример 2.9. *В фонд ежегодно в течение семи лет в конце года поступают средства по 10 000 руб. На эти средства начисляются проценты по ставке* 15 % *годовых. Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, величину фонда на конец срока и его современную стоимость.*

Решение. Коэффициент наращения: $s_{n;i} = \frac{1.15^7-1}{0.15} = 11.066799$. Наращенная сумма: $S = 10\,000 \cdot 11.066799 = 110\,667.99$ руб. Коэффициент приведения: $a_{n;i} = \frac{1-1.15^{-7}}{0.15} = 4.16042$. Современная стоимость: $10\,000 \cdot 4.16042 = 41\,604.2$ руб. □

Рассмотрим ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке.

Для годовой ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке проценты начисляются m раз в году каждый по ставке j/m, где j — номинальная ставка.

Срок ренты равен n лет. Аналогично (2.16) и (2.17) наращенная сумма и современная стоимость ренты определяются по формулам:

$$\begin{aligned} S &= R(1+j/m)^{(n-1)m} + R(1+j/m)^{(n-2)m} + \ldots + R(1+j/m)^m + R = \\ &= R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}, \end{aligned} \qquad (2.18)$$

$$A = \frac{R}{(1+j/m)^m} + \frac{R}{(1+j/m)^{2m}} + \ldots + \frac{R}{(1+j/m)^{nm}} = \\ = R\frac{(1+j/m)^{-mn}-1}{1-(1+j/m)^m}. \tag{2.19}$$

Множители $s_{mn;j/m} = \dfrac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1}$ и $a_{mn;j/m} = \dfrac{(1+j/m)^{-mn}-1}{1-(1+j/m)^m}$ называются коэффициентами наращения и приведения ренты соответственно.

Пример 2.10. *В фонд ежегодно в течение семи лет в конце года поступают средства по 10 000 руб. На эти средства поквартально начисляются проценты по номинальной ставке 15 % годовых. Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, величину фонда на конец срока и его современную стоимость.*

Решение. Коэффициент наращения: $s_{nm;j/m} = \frac{(1+0.15/4)^{4\cdot 7}-1}{(1+0.15/4)^4-1} = 11.366392$. Наращенная сумма: $S = 10\,000\cdot 11.366392 = 113\,663.92$ руб. Коэффициент приведения: $a_{mn;j/m} = \frac{1-(1+0.15/4)^{-4\cdot 7}}{(1+0.15/4)^4-1} = 4.0546724$. Современная стоимость: $10\,000 \cdot 4.0546724 = 40\,546.72$ руб. $\square$

Рассмотрим ренты с неоднократными выплатами в году.

Определение 2.14. *Если выплаты производятся p раз в году, то такая рента называется p-срочной, или рентой с неоднократными выплатами в году.*

Начисления на первую выплату каждого года, равную R/p, производятся $\frac{p-1}{p}$ лет, на вторую — $\frac{p-2}{p}$ лет и т. д. Наращенная сумма за каждый год в конце года составит

$$R_1 = \frac{R}{p}(1+i)^{(p-1)/p} + \frac{R}{p}(1+i)^{(p-2)/p} + \ldots + \frac{R}{p}(1+i)^{1/p} + \frac{R}{p} = \frac{R}{p}\frac{i}{(1+i)^{1/p}-1}.$$

Сумма всех ежегодных платежей, равных R_1, в течение n лет вычисляется по формуле

$$S = R_1\frac{(1+i)^n-1}{i} = R\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}. \tag{2.20}$$

Множитель $s_{n;i}^{(p)} = \dfrac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$ называется коэффициентом наращения ренты. Аналогично можно получить формулу для современной стоимости ренты:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}. \tag{2.21}$$

Множитель $a_{n;i}^{(p)} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$ называется коэффициентом приведения ренты.

Пример 2.11. *В фонд ежегодно в течение семи лет в конце года поступают средства по 10 000 рублей. На эти средства поквартально начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Выплаты производятся в конце квартала. Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, величину фонда на конец срока и его современную стоимость.*

Решение. Коэффициент наращения: $s_{n;i}^{(p)} = \frac{1.15^7-1}{4(1.15^{1/4}-1)} = 11.671179$. Наращенная сумма: $S = 10\,000 \cdot 11.671179 = 116\,711.79$ рубй. Коэффициент приведения: $a_{n;i}^{(p)} = = \frac{1-1.15^{-7}}{4(1.15^{1/4}-1)} = 4.387629$. Современная стоимость: $10\,000 \cdot 4.387629 = 43\,876.29$ руб. □

Самым общим типом является рента с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году. В любом году производится p выплат по R/p рублей, где R — годовая выплата. Количество начислений процентов в году по номинальной ставке j равно m. Срок ренты равен n лет. В этом случае наращенная сумма на все выплаты года к концу этого года определяется соотношением

$$R_1 = \frac{R}{p}(1+j/m)^{(p-1)m/p} + \frac{R}{p}(1+j/m)^{(p-2)m/p} + \ldots + \frac{R}{p}(1+j/m)^{m/p} + \frac{R}{p}.$$

Наращенная сумма всей ренты

$$S = R_1(1+j/m)^{(n-1)m} + R_1(1+j/m)^{(n-1)m} + \ldots + R_1(1+j/m)^m + R_1 = \\ = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \tag{2.22}$$

Множитель $s^{(0)}{}_{mn;j/m} = \dfrac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}$ — коэффициент наращения ренты. Аналогично можно получить стоимость всей ренты:

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \tag{2.23}$$

Множитель $a^{(0)}{}_{mn;j/m} = \dfrac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}$ — коэффициент приведения ренты.

Пример 2.12. *В фонд ежегодно в течение семи лет в конце года поступают средства по 10 000 рублей. На эти средства поквартально начисляются проценты по ставке* 15 % *годовых. Выплаты производятся в конце квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, величину фонда на конец срока и его современную стоимость.*

Решение. Коэффициент наращения: $s_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{(1+0.15/12)^{12\cdot7}-1}{4[(1+0.15/12)^{12/4}-1]} = 12.10876$. Наращенная сумма: $S = 10\,000 \cdot 12.10876 = 121\,087.6$ руб. Коэффициент приведения: $a_{mn;j/m}^{(p)} = = \frac{1-(1+0.15/12)^{-12\cdot7}}{4[(1+0.15/12)^{12/4}-1]} = 4.264981$. Современная стоимость: $10\,000 \cdot 4.264981 = 42\,649.81$ руб. □

3. Математические модели в экономике

В этой главе рассматриваются построение математических моделей экономических задач, экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева), линейная модель обмена, модель динамического межотраслевого баланса и модель расширяющейся экономики Неймана.

3.1. Математическое моделирование экономических систем и явлений

Важным фактором, определяющим роль математики в различных приложениях, является возможность описания наиболее существенных черт и свойств какого-либо класса объектов (явлений) внешнего мира на языке математических символов и соотношений. Такое описание называют *математическим моделированием* (формализацией). Строгое математическое описание применимо и в экономике, где действуют устойчивые количественные закономерности.

Слова "экономия", "экономика" и производные от них в переводе с греческого имеют значение "ведение домашнего хозяйства". Вопросы рационального (оптимального) ведения хозяйства на различных уровнях составляют основное содержание экономической науки. Для любой хозяйственной единицы основная задача – оптимальное (наиболее выгодное) распределение ограниченных ресурсов для достижения поставленных целей. С математической точки зрения – это задача оптимизации: найти такие значения некоторых переменных (доступных ограниченных ресурсов), которые доставляют максимум (минимум) некоторой функции (математический идентификатор поставленной цели).

Экономика любой страны состоит из множества организаций – участников экономики. В зависимости от решаемой задачи рационального ведения хозяйства любая хозяйственная единица может выступать в той или иной роли. Это могут быть потребители, производители, фирмы, правительственные организации и др.

Под *потребителями* понимаются отдельные лица или группы лиц, объединенные единым доходом и единой целью рационального распределения имеющегося дохода на потребление. Под *производителем* понимаются предприятия, производящие товары для продажи их другим производителям или потребителям и решающие задачу получения максимальной прибыли. Действия участников экономики теряют смысл без первичного объекта реальной экономики – товара. Под *товаром* в экономической литературе понимается любое благо или услуга, которое предназначено для продажи. Имеется особый товар, являющийся эквивалентом при обмене, – деньги. Денежный эквивалент единицы товара называется его ценой.

При исследовании экономических задач математические модели дают новые знания об объекте. Формализация позволяет рассматривать реальную задачу как математическую и пользоваться для анализа математическим аппаратом, не зависящим от природы объекта. Использование математической модели избавляет от необходимости дорогостоящих опытов и экспериментов.

Общие принципы построения математических моделей в экономике:

1) адекватность (соответствие модели своему оригиналу);

2) объективность (соответствие научных выводов реальным условиям);

3) простота (незасоренность модели второстепенными факторами);

4) чувствительность (способность модели реагировать на изменение начальных параметров);

5) устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи);

6) универсальность (широта области применения).

Основные этапы проведения математических исследований экономической задачи:

1) изучение предметной области и определение цели исследования;

2) формулировка проблемы;

3) сбор данных (статистических, экспертных и прочих);

4) построение математической модели;

5) выбор (или разработка) вычислительного метода и построение алгоритма решения задачи;

6) программирование алгоритма и отладка программы;

7) проверка качества модели на контрольном примере;

8) внедрение результатов на практике.

Этапы 1–3 относятся к доматематической части исследования, 4–7 — математическая часть исследования, 8-й этап является результатом совместной работы заказчиков и разработчиков модели.

Выделяют следующие основные этапы построения математической модели [5]:

1. Постановка задачи и разработка концептуальной модели. Словесно описывается объект моделирования, цели его функционирования, среда, в которой он функционирует; выявляются отдельные элементы, возможные состояния, характеристики объекта и его элементов; определяются взаимосвязи между элементами, состояниями, характеристиками.

   Такое предварительное приближённое представление объекта исследования называется *концептуальной моделью*.

2. Построение модели. На основе содержательного описания объекта выполняются следующие действия:

   а) анализируется исходное множество характеристик объекта и выделяются наиболее существенные характеристики;

   б) определяются управляемые и неуправляемые параметры (переменные) и вводятся их символьные обозначения;

   в) составляется система ограничений, которым переменные должны удовлетворять;

   г) строится целевая функция.

В результате получаем математическую модель исследуемого объекта. Следует иметь в виду, что от удачного выбора переменных зависит простота модели. При составлении ограничений нужно следить, чтобы в модель были включены все ограничительные условия и в то же время не было бы ни одного лишнего или записанного в более жёсткой форме, чем того требуют условия задачи. Совокупность числовых значений переменных, удовлетворяющих ограничениям, должна определять один из вариантов состояния объекта. Целевая функция должна отражать критерий выбора оптимального (или лучшего) варианта.

3. Выбор метода и алгоритма решения. Математическая модель классифицируется и проводится выбор математического аппарата и алгоритма для решения задачи. В зависимости от вида и структуры целевой функции и ограничений используют те или другие методы теории оптимальных решений.

4. Проверка адекватности и корректировка модели. Выясняется, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики, т. е. согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. По результатам проверки модели на адекватность принимается решение о возможности её практического использования или о проведении корректировки.

   Возможны корректировки концептуальной модели, математической модели и соответственно метода решения. Корректировка может потребовать проведения дополнительных исследований на объекте, наборе необходимых данных, а также уточнения структуры модели.

   Можно выделить такие варианты корректировок математической модели: расширение набора внешних факторов, управляющих переменных и выходных характеристик модели; переход от линейных зависимостей к нелинейным зависимостям или повышению степени нелинейности; расширение набора ограничений или их комбинаций.

   Корректировка может повторяться многократно до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходными характеристиками объекта и модели.

5. Поиск решения на модели. После достижения удовлетворительного уровня адекватности модели применяют соответствующий метод или алгоритм для нахождения оптимального решения на математической модели. Это решение может принимать разные формы: аналитическую, численную или алгоритмическую (в виде набора процедур, правил и т. п.).

6. Реализация найденного решения на практике. Полученной на модели оптимальной стратегии управления необходимо предоставить соответствующую содержательную форму в виде инструкций и правил, что и как делать, которая была бы понятной для административного персонала данной организации и лёгкой для выполнения в производственных условиях.

   Редко математическую модель можно «подобрать» из числа имеющихся. Процесс подбора параметров модели таким образом, чтобы она соответствовала изучаемому объекту, называется идентификацией модели. Исходя из характера полученной модели и цели исследования, выбирают либо известный метод, либо приспосабливают (модифицируют) известный метод, либо разрабатывают новый.

Пример 3.1. *Пусть некоторый экономический регион производит n видов продуктов исключительно своими силами и только для населения данного региона. Предполагается, что технологический процесс отработан, а спрос населения на эти товары изучен. Определить годовой объём выпуска продуктов с учётом того, что этот объём должен обеспечить как конечное, так и производственное потребление.*

Решение. Составим математическую модель этой задачи. По её условию даны виды продуктов, спрос на них и технологический процесс, требуется найти объём выпуска каждого вида продукта.

Обозначим известные величины c_i – спрос населения на i-й продукт ($i = 1, \ldots, n$), a_{ij} – количество i-го продукта, необходимое для выпуска единицы j-го продукта по данной технологии ($i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n$).

Обозначим неизвестные величины x_i – объём выпуска i-го продукта ($i = 1, \ldots, n$).

Совокупность $c = (c_1, \ldots, c_n)$ называется вектором спроса, числа a_{ij} – технологическими коэффициентами, а совокупность $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вектором выпуска, где $x_i \geqslant 0$.

По условию задачи вектор x распределяется на две части: на конечное потребление (вектор c) и на воспроизводство (вектор $x - c$). Вычислим ту часть вектора x, которая идёт на воспроизводство.

По нашим обозначениям для производства x_j количества j-го товара идёт $a_{ij}x_j$ количества i-го товара. Тогда сумма $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$ показывает ту величину i-го товара, которая нужна для всего выпуска $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, должно выполняться равенство

$$x_i - c_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Распространяя это рассуждение на все виды продуктов, приходим к искомой модели

$$\begin{cases} x_1 - c_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2 - c_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ x_n - c_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где $x_i \geqslant 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Решая эту систему из n линейных уравнений относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, найдём требуемый вектор выпуска.

Переход к векторной записи поможет записать модель в более компактной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A_{n\times n}$ называется *технологической матрицей*. Модель теперь запишется так: $x - c = Ax,\ x \geqslant 0$ или $x - Ax = c,\ x \geqslant 0$. Мы получили классическую модель "Затраты-выпуск", автором которой является известный американский экономист В. В. Леонтьев. □

Пример 3.2. *Задача об использовании ресурсов [4]*

Предприятие производит два вида продукции X и Y. 1 кг X приносит прибыль 5 рублей, требует 2 кг ресурса A и 3 кг ресурса B. 1 кг Y приносит прибыль 10 *рублей, требует 7 кг ресурса A и 9 кг ресурса B. Суммарный запас ресурсов 70 кг (A) и 50 кг (B). При каком объеме производства прибыль будет максимальна?*

Решение. Пусть предприятие производит x кг продукции X и y кг продукции Y. Тогда общая прибыль $F = 5x + 10y$ (целевая функция). Найдем максимум целевой функции при ограничениях $2x + 7y \leqslant 70$ (ресурс A) и $3x + 9y \leqslant 50$ (ресурс B). Конечно, $x, y \geqslant 0$. Получаем задачу линейного программирования:

$$5x + 10y \to \max$$

$$\begin{cases} 2x + 7y \leqslant 70, \\ 3x + 9y \leqslant 50, \\ x, y \geqslant 0. \end{cases}$$

Геометрический метод решения задачи линейного программирования приводит нас к решению $x = 50/3, y = 0; F = 250/3$. □

Пример 3.3. *Задача о диете*

Используются 2 вида продуктов X и Y. 1 кг X стоит 6 руб., содержит 9 единиц питательного вещества A и 17 единиц питательного вещества B. 1 кг Y стоит 8 руб., содержит 12 единиц питательного вещества A и 23 единицы питапельного вещества B. Необходимый минимум в диете 20 единиц (вещество A) и 30 единиц (вещество B). Составить диету минимальной стоимости.

Решение. Пусть используют x кг продукта X и y кг продукта Y. Тогда общая стоимость $6x + 8y$ – целевая функция. Найдем минимум целевой функции при ограничениях $9x + 12y \geqslant 20$ (содержание вещства A) , $17x + 23y \geqslant 30$ (содержание вещества B). По смыслу задачи $x, y \geqslant 0$.

$$6x + 8y \to \min$$

$$\begin{cases} 9x + 12y \geqslant 20, \\ 17x + 23y \geqslant 30, \\ x, y \geqslant 0. \end{cases}$$

Минимальная стоимость диеты $F = 40/3$. □

3.2. Схема межотраслевого баланса. Модель Леонтьева

Балансовые модели широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических процессов. Схема межотраслевого баланса лежит в основе многих линейных моделей производства и позволяет объяснить, как производственная система создает продукцию конечного спроса: для потребления, инвестиций и экспорта. Первые советские экономисты для изучения структуры американской экономики [6], [7] предложили метод межотраслевого баланса. Известный американский экономист В. В. Леонтьев попытался проанализировать причины экономической депрессии в США 1929–1932 гг., представив математическую модель для расчёта связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода.

Экономика в модели Леонтьева представляется в укрупнённом до уровня отраслей виде. Анализ потока товаров между отраслями проводится при таком функционировании производственного сектора, когда объём выпуска соответствует суммарному спросу на товары.

Все отрасли в межотраслевом балансе рассматриваются как взаимосвязанные. Каждая из них для производства своего продукта использует результаты производства других фирм. Предполагается, что каждая отрасль является «чистой», т. е. производит только один продукт, и каждый продукт производится только одной отраслью. Вся национальная экономика представляется в виде совокупности n отраслей, выпускающих продукт одного типа. В процессе производства своего вида продукта любая отрасль нуждается в продукции других отраслей, т. е., с одной стороны, она является производителем некоторого вида продукции, а с другой – потребителем. Выпущенный продукт может расходоваться на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями (промежуточный продукт), а также может быть предназначен для целей конечного потребления (конечный продукт).

Пусть n – количество «чистых» отраслей. Для отражения связей между отраслями экономики в некоторый момент времени T_0 строим таблицу с итоговыми данными.

Таблица 9. Структура межотраслевого баланса

Номер отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовый продукт
1	$\widetilde{a}_{11}$	$\widetilde{a}_{12}$	$\dots$	$\widetilde{a}_{1n}$	$\widetilde{c}_1$	$\widetilde{v}_1$
2	$\widetilde{a}_{21}$	$\widetilde{a}_{22}$	$\dots$	$\widetilde{a}_{2n}$	$\widetilde{c}_2$	$\widetilde{v}_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\widetilde{a}_{n1}$	$\widetilde{a}_{n2}$	$\dots$	$\widetilde{a}_{nn}$	$\widetilde{c}_n$	$\widetilde{v}_n$
Условно чистая продукция	$\widetilde{z}_1$	$\widetilde{z}_2$	$\dots$	$\widetilde{z}_n$	$\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{z}_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{c}_j$	
Валовый выпуск	$\widetilde{v}_1$	$\widetilde{v}_2$	$\dots$	$\widetilde{v}_n$		$\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{v}_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{v}_j$

Каждая из n строк в таблице 9 представляет отрасль как производителя, а столбец – как потребителя. Величина $\widetilde{a}_{ij}$ задает объем продукции отрасли с номером i, который израсходован отраслью j в процессе производства за рассматриваемый период времени (например, за год). Валовый выпуск $\widetilde{v}_j$ равен общему объему продукции j-й отрасли за тот же период, число $\widetilde{c}_j$ показывает объем продукции j-й отрасли, потребляемый на нужды непроизводственной сферы (создания запасов, удовлетворения общих потребностей в науке, обороне, управлении и т. д.); z_j – условно чистая продукция, которая включает оплату труда, чистый доход и амортизацию. Показатели могут быть натуральными (метры, штуки, тонны) или стоимостными (в этом случае они положительны).

Строки таблицы 9 показывают распределение продукции, и для каждой из них справедливо балансовое соотношение

$$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}=\widetilde{v}_j-\widetilde{c}_j,\ i=1,2,\dots,n, \tag{3.1}$$

т. е. потребление продукции во всех отраслях равно разности общего производства продукции в i-й отрасли и продукта конечного потребителя, выпускаемого данной отраслью.

Разделим элементы j-го столбца таблицы 9 на величину общего объема продукции j-й отрасли $\widetilde{v}_j$, тогда число $a_{ij} = \dfrac{\widetilde{a}_{ij}}{\widetilde{v}_j}$ можно интерпретировать как объем продукции i-й отрасли, необходимой для производства единицы продукции отрасли с номером j; $c_j = \dfrac{\widetilde{c}_j}{\widetilde{v}_j}$ – доля продукции j-й отрасли на непроизводственное потребление.

В. В. Леонтьев установил, что с течением времени величины a_{ij} меняются слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это явление объясняется тем, что длительное время технология производства остается на одном уровне, поэтому числа a_{ij} характеризуют технологию j-й отрасли в рассматриваемый период и носят название *коэффициентов прямых затрат*.

Использование числовых матриц в балансовых моделях позволяет относить их к матричным экономико-математическим моделям. Основу экономико-математической модели межотраслевого баланса составляет технологическая матрица прямых затрат $A = (a_{ij})$. В ней заложена информация о структуре межотраслевых связей, о технологии производства. Если сравнивать такие матрицы, составленные в разные моменты времени (достаточно удаленные), то можно отследить изменение технологии, ее развитие, а самое главное – сделать долгосрочный прогноз производства.

Модель Леонтьева основана на двух предположениях:

1) сложившуюся технологию производства считаем неизменной в течение времени $[T_0, T]$, где $T > T_0$. Это предположение гарантирует постоянство матрицы $A = (a_{ij})$,

2) требование линейности существующих технологий: для выпуска отраслью j продукции объёма x_j необходимо произвести затраты $x_j a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n$, продукции всех отраслей. Каждая отрасль производит любой объем своей продукции, если она обеспечена сырьем в необходимом количестве. Линейность накладывает ограничения на исходную модель.

В действительности, производственные возможности отрасли ограничены основными фондами и трудовыми ресурсами, на отдельном предприятии могут выпускать различные виды продукции, все это указывает на неверность данных предположений. Однако практика использования таких моделей показала их адекватность и применимость для проведения межотраслевых исследований.

Обозначим через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_3)$ вектор валового выпуска (интенсивностей), матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})$ описывает технологию при единичной интенсивности работы всех отраслей, тогда в матричных обозначениях вектор производственных затрат равен Ax, а свободный остаток $c = x - Ax$ используется на накопление или непроизводственные цели.

Сформулируем задачу планирования прозводства на период $[T_0, T]$: при заданном векторе c конечного потребления определить необходимый вектор x валового выпуска [6], т. е. решить систему

$$x - Ax = c, x \geqslant 0 \tag{3.2}$$

при заданном векторе c и постоянной технологической матрице A. Такой вариант межотраслевого баланса называют *моделью Леонтьева.*

Модель Леонтьева используется для следующих плановых расчётов:

1) задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли x_i, можно определить объёмы конечной продукции каждой отрасли c_i

$$c = (E - A)x; \tag{3.3}$$

2) задав величины конечной продукции всех отраслей c_i, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли x_i

$$x = (E - A)^{-1}c; \tag{3.4}$$

Матрицу $(E - A)^{-1}$ обозначают через B и называют матрицей коэффициентов *полных материальных затрат*, или обратной матрицей Леонтьева.

3) задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей объёмы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объёмы валовой продукции вторых.

Пример 3.4. *Рассматривается трехотраслевой межотраслевой баланс. Дана матрица коэффициентов прямых затрат $A = (a_{ij})$ и вектор конечного продукта c:*

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Определить валовое производство x, обеспечивающее заданный конечный продукт.

Решение. Для нахождения валового производства, то есть вектора x, необходимо составить и решить систему линейных уравнений $(E - A)x = c$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 0,7x_1 - 0,1x_2 = 100, \\ -0,2x_1 + 0,6x_2 - 0,1x_3 = 200, \\ -0,1x_1 + 0,8x_3 = 300. \end{cases}$$

Определитель системы $\triangle = |E - A| \neq 0$,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,319. \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 100 & -0,1 & 0 \\ 200 & 0,6 & -0,1 \\ 300 & 0 & 0,8 \end{vmatrix} = 67.$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 0,7 & 100 & 0 \\ -0,2 & 200 & -0,1 \\ -0,1 & 300 & 0,8 \end{vmatrix} = 150. \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & 100 \\ -0,2 & 0,6 & 200 \\ -0,1 & 0 & 300 \end{vmatrix} = 128.$$

По формулам Крамера находим единственное решение системы: $x_1 = \dfrac{67}{0,319} \approx 210,03$; $x_2 =$ $= \dfrac{150}{0,319} \approx 470,219$; $x_3 = \dfrac{128}{0,319} \approx 401,254$. □

Пример 3.5. *Для двухотраслевой экономической системы заданы общие (валовые) объемы продукции* $x_1 = 400, x_2 = 500$, *объемы конечной продукции* $c_1 = 150, c_2 = 250$, *объемы продукции, потребляемые в процессе производства* $x_{11} = 50, x_{12} = 200, x_{21} = 100, x_{22} = 150$. *Найти коэффициенты полных материальных затрат. Для нового вектора конечного продукта* c $= \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ *вычислить соответствующий вектор валового выпуска и заполнить схему межотраслевого баланса.*

Решение. Определим коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = 0,125; a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = 0,4; a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = 0,25; a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = 0,3.$$

Технологическая матрица прямых затрат имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Для нахождения вектора валового выпуска $x = (E - A)^{-1}c$ найдем матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B = (E - A)^{-1}$.
$E - A = \begin{pmatrix} 0,875 & -0,4 \\ -0,25 & 0,7 \end{pmatrix}$, для вычисления обратной матрицы используем формулу
$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, тогда $B = \dfrac{1}{0,5125} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,25 & 0,875 \end{pmatrix}$
и $x = \dfrac{1}{0,5125} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 312,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 507,375 \\ 609,75 \end{pmatrix}$; $\widetilde{a}_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, $\widetilde{a}_{11} = 63,375$; $\widetilde{a}_{12} = 244$; $\widetilde{a}_{21} = 126,75$; $\widetilde{a}_{22} = 183$. Незначительные расхождения в вычислениях объясняются погрешностью из-за округления чисел.

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовый продукт
1	63,375	244	200	507,375
2	126,75	183	300	609,75
Условно чистая продукция	317,25	182,75	500	
Валовый продукт	507,375	609,75		1117,125

□

3.3. Линейная модель обмена

В этом разделе рассмотрим простую линейную модель обмена, или *модель международной торговли*, математическая формулировка которой близка к модели Леонтьева (3.2). Модель служит для ответа на вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т. е. не было дефицита торгового баланса для каждой из стран-участниц. Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления, как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны.

Рассмотрим n стран, торгующих друг с другом с государственными бюджетами π_j. Будем считать, что весь госбюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Доля a_{ij} дохода π_j j–й страны, которая тратится на покупку товаров у страны с номером i, постоянна, т. е. мы имеем дело с уже сложившейся структурой международной торговли.

Введем вектор доходов $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, структурную матрицу торговли $A = (a_{ij})$. В линейной модели обмена квадратная $n \times n$ матрица A обладает свойством определения чисел $a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n$, как долей единицы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{3.5}$$

Начиная торговать в соответствии с матрицей обмена A, после одного тура торговли страны будут обладать доходами, задаваемыми вектором $A\pi$. Для сбалансированной торговли необходима бездефицитность торговли каждой из стран, т. е. выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода:

$$A\pi \geqslant \pi. \tag{3.6}$$

Отсюда получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}\pi_1 + a_{12}\pi_2 + \ldots + a_{1n}\pi_n \geqslant \pi_1, \\ a_{21}\pi_1 + a_{22}\pi_2 + \ldots + a_{2n}\pi_n \geqslant \pi_2, \\ \ldots \\ a_{n1}\pi_1 + a_{n2}\pi_2 + \ldots + a_{nn}\pi_n \geqslant \pi_n. \end{cases}$$

Складывая все неравенства, после группировки получим $(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1})\pi_1 + (a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2})\pi_2 + \ldots + (a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn})\pi_n \geqslant \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n$. Учитывая (3.5), имеем $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n \geqslant \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n$. Условие (3.6) в этом случае принимает вид

$$A\pi = \pi. \tag{3.7}$$

С экономической точки зрения это означает, что все страны не могут одновременно получать прибыль.

Основной вопрос, относящийся к модели обмена, формулируется следующим образом: каким должен быть и существует ли вектор π доходов стран – участниц обмена, чтобы выполнялось равенство (3.7)? Необходимым условием существования решения π уравнения (3.7) является наличие у матрицы A собственного числа, равного 1, а задача сводится к отысканию собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

Пример 3.6. *Структурная матрица торговли трех стран имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы стран для сбалансированной торговли.

Решение. Решим систему уравнений $(A - E)\pi = 0$.

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Найдем решение системы методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1+2+3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1(-1)+3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{3\cdot(\frac{2}{3})+2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/4 & -3/2 \end{pmatrix}$, откуда $\pi_1 = \dfrac{3}{2}\pi_3, \pi_2 = 2\pi_3,\ \pi = (\dfrac{3}{2}\pi_3, 2\pi_3, \pi_3)$.

Для сбалансированной торговли соотношение национальных доходов должно быть $\dfrac{3}{2} : 2 : 1$ или 3:4:2. □

Пример 3.7. *Торгуют две страны. Для первой – $3/5$ продукции идет на внутренний рынок. Для второй – $3/4$ на внутреннее потребление и $1/4$ – на экспорт. Найти структуру доходов π_1 и π_2 стран – участниц $(\pi_1 + \pi_2 = 1)$.*

Решение. Выпишем коэффициенты структурной матрицы торговли исходя из условия задачи $a_{11} = 3/5, a_{22} = 3/4, a_{12} = 1/4$. Используем свойство (3.5), тогда матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/4 \\ 2/5 & 3/4 \end{pmatrix}$. Структура доходов стран задается условием (3.7) $(A - E)\pi = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{5}\pi_1 + \dfrac{1}{4}\pi_2 = 0, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \end{cases}$$

решением которой является вектор $\pi = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{8}{13}\right)$. □

3.4. Продуктивность модели Леонтьева

Плановые расчёты по модели Леонтьева (3.2) можно выполнять, если соблюдается условие продуктивности. Особенность матриц A в модели Леонтьева и модели обмена состоит в том, что все элементы этих матриц неотрицательны. Данный факт будем обозначать неравенством $A \geqslant 0$ и говорить, что матрица A *неотрицательна.*

Модель Леонтьева (неотрицательная матрица A) *продуктивна*, если существует такой неотрицательный вектор $x \geqslant 0$, что $x > Ax$. Данное условие означает существование положительного вектора конечной продукции $c > 0$ для модели межотраслевого баланса (3.2).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно выполнение одного из перечисленных ниже условий:

1) матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима, т. е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geqslant 0$;

2) матричный ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k$ сходится, причём его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots$$

3) наибольшее по модулю собственное значение λ_A матрицы A , т. е. решение характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$, строго меньше единицы;

4) все главные миноры матрицы $(E-A)$, т. е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n, положительны.

Более простым способом проверки продуктивности матрицы A является ограничение на величину её нормы, в данном случае на величину наибольшей из сумм элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше 1, то эта матрица продуктивна. Данное условие является достаточным, но не необходимым условием продуктивности, поэтому матрица A может оказаться продуктивной и в случае, когда её норма больше единицы.

Пример 3.8. *Найти собственные числа матрицы* $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\7&0&0\\2&2&3\end{pmatrix}$.

Решение. Собственные числа матрицы A определяются из характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&4\\7&-\lambda&0\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-7)=0.$$

Корни данного уравнения $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=7.$ $\square$

Пример 3.9. *Проверить продуктивность матрицы* $A=\begin{pmatrix}0,3&0,1&0,4\\0,2&0,5&0\\0,3&0,1&0,2\end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся первым критерием продуктивности и проверим условие $(E-A)^{-1}\geqslant 0$. Имеем $E-A=\begin{pmatrix}0,7&-0,1&-0,4\\-0,2&0,5&0\\-0,3&-0,1&0,8\end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу с помощью элементарных преобразований блочной матрицы $\mathrm{C}|E\to E|\mathrm{C}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}7/10&-1/10&-2/5&1&0&0\\-1/5&1/2&0&0&1&0\\-3/10&-1/10&1/5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{1\cdot(\frac{10}{7})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/7&-1/7&10/7&0&0\\-1/5&1/2&0&0&1&0\\-3/10&-1/10&1/5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[1\cdot(\frac{3}{10})+3]{1\cdot(\frac{1}{5})+2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/7&-1/7&10/7&0&0\\0&33/70&-4/35&2/7&1&0\\0&-1/7&22/35&3/7&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{2\cdot(\frac{70}{33})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/7&-1/7&10/7&0&0\\0&1&-8/33&20/33&70/33&0\\0&-1/7&22/35&3/7&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[2\cdot(\frac{1}{7})+3]{2\cdot(\frac{1}{7})+1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-20/33&50/33&10/33&0\\0&1&-8/33&20/33&70/33&0\\0&0&98/165&17/33&10/33&1\end{array}\right)\xrightarrow{3\cdot(\frac{165}{98})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-20/33&50/33&10/33&0\\0&1&-8/33&20/33&70/33&0\\0&0&1&85/98&25/49&165/98\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3\cdot(\frac{8}{33})+2]{3\cdot(\frac{20}{33})+1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&100/49&30/49&50/49\\0&1&0&40/49&110/49&20/49\\0&0&1&85/98&25/49&165/98\end{array}\right).$$

Получили матрицу $(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 100/49 & 30/49 & 50/49 \\ 40/49 & 110/49 & 20/49 \\ 85/98 & 25/49 & 165/98 \end{pmatrix}$.

Все элементы матрицы коэффициентов полных затрат неотрицательны, следовательно, матрица A продуктивна. $\square$

Пример 3.10. *Определить, является ли матрица* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$ *продуктивной.*

Решение. Найдём собственные значения матрицы A, имеем $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 1/2 \\ 1/12 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{24} = 0$, откуда $\lambda^2 - \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{24} = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \frac{1}{12}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\lambda_{max} = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, матрица A продуктивна. $\square$

Пример 3.11. *Определить, является ли матрица* $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$ *продуктивной.*

Решение. Воспользуемся достаточным признаком продуктивности матрицы: сумма элементов в каждом столбце (строке) меньше единицы, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

$$\max \sum_{i=1}^{2} a_{ij} = \max(0,5+0,1; 0,2+0,4) = 0,6 < 1.$$

Матрица A продуктивна. $\square$

Пример 3.12. *Убедиться в продуктивности модели Леонтьева со следующими параметрами* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Решение. По определению продуктивности необходимо установить существование неотрицательного вектора выпуска $x \geqslant 0$, $x = (E-A)^{-1}c$. Матрица $E - A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -5/6 & 5/6 \end{pmatrix}$, обратная матрица (формула для ее построения приводится в примере 2.2) $(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6/5 \\ 3 & 12/5 \end{pmatrix}$, тогда вектор выпуска

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 6/5 \\ 3 & 12/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54/5 \\ 78/5 \end{pmatrix} \text{ или } x = \begin{pmatrix} 10,8 \\ 15,6 \end{pmatrix}.$$

Все элементы вектора выпуска положительны, следовательно, матрица A продуктивна. $\square$

3.5. Коэффициенты трудовых затрат в модели Леонтьева

Модель Леонтьева позволяет решить вопросы, связанные с использованием и распределением трудовых ресурсов. Первая группа условий равновесия в таком случае – это баланс затрат (материальных и трудовых) и выпуска конечной продукции в натуральных единицах.

Сопоставим каждой j-й отрасли число $l_j > 0$, выражающее затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности технологического процесса. Чила l_j могут выражаться числом работающих или измеряться в человеко-часах (человеко-днях). Обозначим $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – вектор затрат трудовых ресурсов, тогда технология модели задается парой (l, A). Если не учитывать предысторию процесса производства (статический вариант модели Леонтьева), то ограничивающим фактором является объем трудовых ресурсов $L, L > 0$. Пусть режим работы экономической системы задается вектором интенсивностей x, тогда объем затрат трудовых ресурсов равен (x, l), причем x – любой неотрицательный вектор, удовлетворяющий неравенству $(x, l) \leqslant L$. В этом случае алгебраическая запись модели выражается системой уравнений:

$$\begin{gathered} x - Ax = c, \\ (x, l) \leqslant L, \\ x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Будем считать, что вектор $c \geqslant 0$ задает структуру конечного спроса. Тогда задачу составления оптимального плана

$$\begin{gathered} \max \alpha \\ x - Ax \geqslant \alpha c, \\ (x, l) \leqslant L, \\ x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

можно интерпретировать как стремление максимизировать количество выпущенных “комплектов” c при рациональном распределении трудовых ресурсов.

Вторая группа условий равновесия рассматриваемой модели – баланс денежных поступлений от продажи отраслевой продукции и денежных затрат производства на оплату ресурсов.

Для перехода к балансовым уравнениям в денежном выражении выпишем двойственную задачу к задаче (3.9):

$$\begin{gathered} \min Lq \\ lq \geqslant p(E - A), \\ (c, p) \geqslant 1, \\ p \geqslant 0, q \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь p – неотрицательный n-мерный вектор цен на продукты, число q – заработная плата, приходящаяся на человеко-час (человеко-день) или одного работающего. Задача (3.10) состоит в определении этих величин.

Соблюдение равенств

$$\begin{gathered} x_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ L = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j, \\ p_j = \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} + q l_j \end{gathered} \tag{3.11}$$

в открытой многоотраслевой статической модели В. В. Леонтьева обеспечивает равновесие в народном хозяйстве страны. Модель (3.11) позволяет определить следующие условия равновесия:

1) спрос на конечный продукт производства и выпуск каждой отрасли;

2) материальные и трудовые ресурсы в каждой отрасли и всей сферы производства;

3) стоимости отраслевых выпусков и трудовых затрат каждой отрасли;

4) цены на продукцию отраслей и ставки заработной платы.

Пример 3.13. *Задача равновесия производства отраслевых продуктов и конечной продукции.*
Задана сфера производства в составе трех отраслей с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,35 \\ 0,25 & 0,38 & 0 \end{pmatrix}$. *На основании известного вектора спроса на конечный продукт* $c = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$ *определить вектор объема производства отраслевой продукции* x.

Решение. Воспользуемся первым равенством (3.11) для вычисления вектора выпуска x. В векторной записи $x = (E - A)^{-1}c$.
Находим $E - A = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & -0,4 \\ -0,3 & 1 & -0,35 \\ -0,25 & -0,38 & 1 \end{pmatrix}$, определитель матрицы $\triangle = |E - A| = 0,6439$. Алгебраические дополнения вычисляются по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, где m_{ij} – минор, получающийся из матрицы $E - A$ вычеркиванием строки с номером i и слолбца с номером j $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$A_{11} = 0,867;\ A_{12} = 0,3875;\ A_{13} = 0,364; A_{21} = 0,352;\ A_{22} = 0,9;$$

$$A_{23} = 0,43;\ A_{31} = 0,47;\ A_{32} = 0,47;\ A_{33} = 0,94.$$

Составляем обратную матрицу:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{\triangle} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{0,6439} \cdot \begin{pmatrix} 0,867 & 0,352 & 0,47 \\ 0,3875 & 0,9 & 0,47 \\ 0,364 & 0,43 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

Вектор выпуска $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,35 & 0,55 & 0,73 \\ 0,6 & 1,4 & 0,73 \\ 0,57 & 0,67 & 1,46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1070 \\ 1025 \\ 1159 \end{pmatrix}$. □

Пример 3.14. *Задача равновесия производства отраслевых продуктов и трудозатрат.*
По вычисленному в примере 2.12 значению вектора x *и заданному вектору* $l = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ *найти требуемое количество трудозатрат в национальной экономике* L.

Решение. Равновесие производства отраслевых продуктов и трудозатрат определяется по второму равенству формулы (3.11).

$$L = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3,$$

имеем $L = 1,2 \cdot 1070 + 1,5 \cdot 1025 + 2,5 \cdot 1159 = 5506,2.$ □

Пример 3.15. *Вычислить цены на отраслевую продукцию p_j по известным значениям ставки заработной платы $q = 15$ ед. и отраслевых коэффициентов трудозатрат l_j из примера 2.13.*

Решение. Из системы уравнений для определения цен $p = pA + ql$ из (3.11) выразим p:

$$p = (E - A)^{-1}ql.$$

Для численного решения задачи о ценах равновесия подставляем все известные значения переменных (матрица $(E - A)^{-1}$ вычислена в примере 2.12):

$$p = \begin{pmatrix} 1,35 & 0,55 & 0,73 \\ 0,6 & 1,4 & 0,73 \\ 0,57 & 0,67 & 1,46 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \times 1,2 \\ 15 \times 1,5 \\ 15 \times 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64,05 \\ 69,675 \\ 80,085 \end{pmatrix}.$$

В результате решения получаем $p_1 = 64,05, p_2 = 69,675, p_3 = 80,085.$ □

3.6. Динамические модели

Динамические модели экономики — модели, описывающие экономику в развитии (в отличие от статических, характеризующих ее состояние в определенный момент). Рассмотренная выше модель Леонтьева не учитывает фактор времени, который может оказаться решающим при принятии плановых решений. При переходе к ее динамическому аналогу предположение о равноправности всех отраслей становится неверным, т. к. в реальности существуют отрасли, сильнее других влияющие на динамику развития экономики (фондообразующие отрасли). При этом не следует забывать, что на создание новых мощностей требуется время (запаздывание или временной лаг) и для конечного промежутка планирования оно может оказаться существенным.

В общем виде динамические модели экономики сводятся к описанию следующих экономических явлений: начального состояния экономики, технологических способов производства (каждый “способ” говорит о том, что из набора ресурсов можно в течение единицы времени произвести некоторый набор продуктов), а также критерия оптимальности.

3.6.1. Модель динамического межотраслевого баланса

Модель динамического межотраслевого баланса лежит в основе многих более сложных моделей, используемых для практического планирования. Это частный случай динамических моделей экономики, основанных на принципе межотраслевого баланса, в который дополнительно вводятся уравнения, характеризующие изменения межотраслевых связей во времени на основе отдельных показателей (например, капитальных вложений и основных фондов), что позволяет создать преемственность между балансами отдельных периодов.

Сфрмулируем один из вариантов схемы динамического межотраслевого баланса, называемый π-моделью (более подробное описание представлено в [6]).

Рассматривается экономика, производящая и потребляющая n типов товаров, запас которых описывается вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Леонтьевская матрица A задает технолгические затраты каждой отрасли при работе с единичной интенсивностью.

Пусть вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ задает совокупный максимально возможный валовый выпуск при наличии основных фондов, ξ_0 – мощности отраслей, созданные к началу планового периода $[1, T]$. Величина η_j – желаемое приращение основной мощности j-й отрасли. Для увеличения мощности необходимо произвести затраты товаров $\eta_j d_{1j}, \eta_j d_{2j}, \ldots, \eta_j d_{nj}$, или в векторном обозначении – $D\eta$, где матрица $D = (d_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ выражает приращение мощностей всех отраслей. Вектор трудовых затрат $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ задает число трудовых затрат l_j, необходимых для выпуска единицы продукции отрасли j, L – количество рабочих, а вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор потребления одного рабочего.

$$Ax_t + D\eta_t + L_t c \leqslant 0, \tag{3.12}$$

$$x_t \leqslant \xi_{t-1}, \tag{3.13}$$

$$\xi_t \leqslant \xi_{t-1} + \eta_t, \tag{3.14}$$

$$(l, x_t) \leqslant L_t, \tag{3.15}$$

$$(x_t, \xi_t, \eta_t, L_t) \geqslant 0, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

В модели выполняются следующие балансовые соотношения:

1) при плане $(x_t, \xi_t, \eta_t, L_t)$ в период $[t-1, t]$ суммарный объем текущих производственных затрат Ax_t, затрат на строительство $D\eta_t$ и заработной платы $L_t c$ не должен превышать валового выпуска в данном периоде x_t (материальный баланс);

2) валовый выпуск x_t в период t ограничен накопленными к этому моменту мощностями ξ_{t-1};

3) динамика прироста мощностей ξ_t в период $[t-1, t]$ характеризуется накоплениями основных мощностей ξ_{t-1} предыдущего периода и желаемым приращением η_t;

4) затраты трудовых ресурсов не превышают объема трудовых ресурсов, занятых на производстве.

В модели (3.12)–(3.15) предполагается, что затраты на прирост мощностей в период $[t–1, t]$ приводят к тому, что новые мощности оказываются созданными к следующему периоду $[t, t+1]$. Для коротких периодов это предположение нереально, т. к. существуют отставания во времени (временные лаги) между вложением средств в производственные фонды и приростом выпуска продукции. Модели, учитывающие лаги капитальных вложений, образуют особую группу динамических моделей межотраслевого баланса и при практическом применении приводят к трудоемким расчетам.

Пример 3.16. *Задана динамическая межотраслевая модель В. В. Леонтьева*

$$B \cdot \frac{dx}{dt} + (A - E)x(t) + c(t) = 0, \tag{3.16}$$

где $B = (b_{ij})$ *– квадратная матрица n-го порядка коэффициентов приростной капиталоемкости производства продукции,* $B \cdot \dfrac{dx}{dt}$ *– выражает зависимость вектора капиталовложений от вектора валового продукта,* $A = (a_{ij})$ *– квадратная матрица n-го порядка коэффициентов прямых материальных затрат, E – единичная матрица n-го порядка, $c(t)$ – вектор-функция продукции непроизводственного потребления. Найти вектор валового выпуска $x(1), x(2)$, если* $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,1 \\ 1,3 & 1,4 \end{pmatrix}$, $c(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Решение. В модели (3.16) выразим $x(t+1)$, имеем

$$x(t+1) = B^{-1}[(E - A + B)x(t) - c(t)].$$

В момент времени $t = 0$ данное равенство позволяет определить величину $x(1)$, т. е. $x(1) = B^{-1}[(E - A + B)x(0) - c(0)]$. Вычислим матрицу B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{1}{0,32} \cdot \begin{pmatrix} 1,4 & -1,1 \\ -1,3 & 1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,375 & -3,4375 \\ -4,0625 & 3,9063 \end{pmatrix},$$

тогда $x(1) = \begin{pmatrix} 4,375 & -3,4375 \\ -4,0625 & 3,9063 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1,95 & 0,95 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$, откуда $x(1) = \begin{pmatrix} 19,0625 \\ 0,15625 \end{pmatrix}$. Произведем аналогичные вычисления для нахождения $x(2) = B^{-1}[(E - A + B)x(1) - c(1)]$.

$$x(2) = \begin{pmatrix} 4,375 & -3,4375 \\ -4,0625 & 3,9063 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1,95 & 0,95 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19,0625 \\ 0,15625 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right],$$

или $x(2) = \begin{pmatrix} 31,3203 \\ 13,375 \end{pmatrix}$. □

3.6.2. Модель Неймана

В экономико-математической теории разработана модель для изучения расширяющейся экономики, в которой допускается совместное производство нескольких видов товаров в каждом технологическом процессе, – это модель Неймана [8]. Многие линейные модели могут быть сведены к конструкции Неймана или близкой к ней.

В классической модели Неймана (Дж. фон Нейман, 30-е годы XX в.) предполагается:

1) экономика, характеризуемая линейными технологиями, каждая из которых обладает конечным числом производственных процессов, т. е. выпускается несколько видов товаров, причем допускается совместная деятельность отраслей;

2) производственные процессы разворачиваются во времени, причем осуществление затрат и выпуск готовой продукции разделены временным лагом;

3) для производства в данный период можно тратить только те продукты, которые были произведены в предыдущем периоде времени, первичные факторы не используются;

4) спрос населения на товары и, соответственно, конечное потребление в явном виде не выделяются;

5) цены товаров изменяются во времени.

Модель Неймана задается на дискретном временном интервале $[0, T]$ конечным набором m производственных процессов, каждый из которых способен, используя n видов затрат, производить n видов продукции. Пара $(a^j, b^j), j = 1, 2, \ldots, m$ характеризует технологический потенциал j-го процесса, где вектор $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ – вектор затрат, а $b^j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ – вектор выпуска товаров, необходимых для его функционирования. Пары $(a^j, b^j), j = 1, 2, \ldots, m$ будем называть *базисными процессами*, а матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

матрицей затрат и *матрицей выпуска* соответственно. Технология модели Неймана задается парой неотрицательных матриц (A, B).

Определим новый технологический процесс, в котором затраты и выпуск являются линейной комбинацией векторов затрат a^j и выпуска b^j базисных процессов с коэффициентами $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{j=1}^{m} (a^j, b^j) x_j = \Big(\sum_{j=1}^{m} a^j x_j, \sum_{j=1}^{m} b^j x_j \Big) = (Ax, Bx).$$

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с неотрицательными компонентами будем называть *вектором интенсивностей* и говорить, что в процессе (Ax, Bx) базисный процесс (a^j, b^j) участвует с интенсивностью x_j

Для математического описания предположений модели введем в рассмотрение вектор интенсивностей $x^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_m^t)$ – вектор, описывающий функционирование производственной системы в период $[t-1, t]$.

Предположение 1. Модель Неймана замкнута, т. е. для производства в период $[t-1, t]$ (затраты Ax^t) мы можем тратить только те продукты, которые были произведены в предыдущий период времени (выпуск Bx^{t-1}).

$$Ax^t \leqslant Bx^{t-1}, \ t = 1, 2, \ldots, T. \tag{3.17}$$

Считаем, что к началу планового периода сформирован вектор запасов Bx^0.

Последовательность векторов интенсивностей $x^1, x^2, \ldots, x^T$, удовлетворяющих системе неравенств (3.17), будем называть *планом*, или *траекторией интенсивностей с началом* x^0, и обозначать через $\{x^t\}$.

При исследовании планов модели Неймана используются цены на продукты. Пусть p_i^t – цена единицы i-го продукта в период $[t, t+1]$, а $p^t = (p_1^t, p_2^t, \ldots, p_n^t)$ – вектор цен.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j$ – прибыль j-го процесса за период $[t-1, t]$, поскольку в начале периода тратятся средства на закупку затрат по ценам p^{t-1} данного периода, а затем произведенная продукция продается по ценам следующего периода.

Предположение 2. Правило нулевого дохода.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j - \sum_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j \leqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T,$$

или в векторном обозначении

$$p^t B \leqslant p^{t-1} A. \tag{3.18}$$

Неравенством (3.18) утверждается, что никакой из процессов не приносит прибыли. На самом деле парадокс здесь кажущийся: величины дохода и издержек относятся к разным периодам времени. Пусть j-й процесс представляет собой некоторую производственную фирму, имеющую на начало периода $[t-1, t]$ капитал (доход) в размере k_j. Закупив сырье по ценам p^{t-1}, фирма может осуществить в этот период производство с интенсивностью

$$x_j^t = \frac{k_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j}.$$

Если прибыль нулевая, то

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j\Big) x_j^t = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^t b_i^j\Big) k_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{t-1} a_i^j} = k_j,$$

и, следовательно, на конец периода фирма обладает тем же капиталом k_j. Однако в условиях совершенной конкуренции цены со временем снижаются $p^t < p^{t-1}$ и покупательная способность капитала k_j на конец периода становится выше.

Последовательность векторов цен $p^1, p^2, \ldots, p^T$, удовлетворяющих системе неравенств (3.18), будем называть *траекторией цен* и обозначать $\{p^t\}$.

Предположение 3. Общая денежная масса не меняется. Это можно выразить в виде равенства

$$p^{t-1} A x^t = p^t B x^t,\ t = 1, 2, \ldots, T. \tag{3.19}$$

Предположение 4. Вся денежная масса находится в обращении

$$p^t B x^{t-1} = p^t A x^t,\ t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3.20}$$

т. е. вся сумма денег, вырученная от продажи продукции цикла в период $[t-1, t]$, тут же идет на приобретение затрат для следующего цикла $[t, t+1]$.

Совокупность соотношений (3.18)–(3.20), дополненная требованиями $x^t \geqslant 0$, $p^t \geqslant 0$, $t = 1, 2, \ldots, T$, называется *моделью Неймана.*

Пример 3.17. *В модели Неймана заданы матрица затрат* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *матрица выпуска* $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, *вектор интенсивностей* $x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. *Найти векторы затрат и выпуска.*

Решение. Вектор затрат $Ax = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$. Вектор выпуска $Bx = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$. □

Пример 3.18. *Даны матрицы затрат* $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, *выпуска* $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, *вектор цен* $p = (1\ 5)$ *и вектор начальных запасов* $Bx^0 = (10\ 21)$. *Найти интенсивности технологических процессов, максимизирующие стоимость выпуска продукции за один производственный цикл, и определить эту стоимость.*

Решение. Для нахождения вектора интенсивностей $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ имеем задачу линейного программирования:

$$pBx \to max,$$

$$Ax \leqslant Bx^0.$$

$$30x_1 + 80x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10, \\ 4x_1 + 10x_2 \leqslant 21. \end{cases}$$

Легко определяется, что вектор интенсивностей $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,1 \end{pmatrix}$, а стоимость выпуска продукции равна 168. □

Важную роль при изучении модели Неймана играют стационарные траектории интенсивностей и цен.

Траектория интенсивностей $\{x^t\}_{t=\overline{1,T}}$ называется *стационарной*, если существует такое число $\nu > 0$, что $x^t = \nu x^{t-1}$ для $t = 1, 2, \ldots, T$, или $x^t = \nu^t x$, где $x = x^0$. Если $\nu > 1$, то говорят, что в экономике наблюдается *сбалансированный рост производства.*

Имеет место следующее

Утверждение 1. Для того чтобы последовательность $x^t = \nu^t x\,(t = 1, 2, \ldots, T)$, была стационарной траекторией интенсивностей, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\nu Ax \leqslant Bx. \tag{3.21}$$

Траектория цен $\{p^t\}_{t=\overline{0,T-1}}$ называется стационарной, если существует $\mu > 0$ такое, что $\mu p^t = p^{t-1}$ для $t = 0, 1, \ldots, T-1$, или $\mu^t p^t = p$, где $p = p^0$ – начальный вектор цен. Если $\mu > 1$, то говорят, что в экономике наблюдается *сбалансированное снижение цен.* Справедливо следующее

Утверждение 2. Последовательность $p^t = \mu^{-t} p$ будет стационарной траекторией цен тогда и только тогда, когда

$$\mu pA \geqslant pB. \tag{3.22}$$

Для стационарных траекторий $x^t = \nu^t x, p^t = \mu^{-t} p$ равенства (3.19) и (3.20) принимают вид

$$\mu pAx = pBx, \tag{3.23}$$

$$\nu pAx = pBx. \tag{3.24}$$

Говорят, что *модель Неймана находится в состоянии равновесия с параметрами* (ν, μ, x, p), где $\nu > 0, \mu > 0, x \geqslant 0, p \geqslant 0$, если выполнены условия (3.21)–(3.24).

Величина pAx – стоимость затрат в состоянии равновесия и естественно считать её ненулевой $pAx > 0$. Тогда из (3.21)–(3.22) следует $\mu = \nu$. Их общее значение обозначим через α. *Невырожденным положением равновесия* в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0,\ x \geqslant 0, p \geqslant 0$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\alpha Ax \leqslant Bx,\ \alpha pAx \geqslant pBx,\ pAx > 0. \tag{3.25}$$

Число α называется *темпом роста,* луч $y = \mu x$ $(\mu \geqslant 0)$ – *лучом Неймана.*

Имеет место

Теорема 3.1. *Если неотрицательные матрицы A и B таковы, что в матрице B нет нулевых строк, а в матрице A нет нулевых столбцов, то решение системы* (3.25) *существует.*

Условия теоремы допускают естественное экономическое толкование. Требование $a^j \neq 0, j = \overline{1, m}$ означает, что нет процессов, которые ничего не тратят (отсутствие роста изобилия). Другое условие означает, что всякий продукт производится в рассматриваемой модели.

Для модели Неймана существует понятие продуктивности, обобщающее соответствующее понятие модели Леонтьева.

Модель Неймана (A, B) называется продуктивной, если система неравенств

$$Bx - Ax \geqslant c,\ x \geqslant 0$$

имеет решение при любом $c \geqslant 0$. Модель Неймана может иметь только конечное число темпов роста, не превышающее $\min(m, n)$.

Наибольшее неотрицательное число λ , которое удовлетворяет уравнению $det|A - \lambda B| = 0$, называется *числом Фробениуса* модели Неймана.

Теорема 3.2. *Модель Неймана (A, B) продуктивна тогда и только тогда, когда её число Фробениуса меньше 1.*

Если выпуск увеличивается с каждым годом, то говорят о сбалансированном росте производства. В этом случае справедливо соотношение для производственных процессов

$$x_j^t = x_j^{t-1} + \lambda x_j^{t-1}, \tag{3.26}$$

где $\lambda > 0$ – темп сбалансированного роста производства, $t = 1, 2, \ldots, T,\ j = 1, 2, \ldots, m$. Если известна интенсивность к началу рассматриваемого процесса x_j^0, то соотношение (3.26) примет вид

$$x_j^t = (1 + \lambda)^t x_j^0.$$

Среди всех темпов сбалансированного роста производства λ можно выбрать максимальный темп сбалансированного роста производства $\overline{\lambda}$. В [9] показано, что в состоянии равновесия

$$\overline{\lambda} = \frac{p^t B x^t}{p^t A x^t} - 1,$$

если для начальных условий выполняется соотношение

$$\overline{\lambda} = \frac{p^0 B x^0}{p^0 A x^0} - 1.$$

Для условий максимального темпа сбалансированного роста производства траектория производства $\overline{x} = \{\overline{x}^t\},\ t = 0, 1, \ldots, T$ называется траекторией равновесного роста, или траекторией Неймана, или лучом Неймана. Эта траектория соответствует максимальному сбалансированному росту

$$\overline{x}_j^t = (1 + \overline{\lambda})^t \overline{x}_j^0.$$

Пример 3.19. *Продуктивна ли модель Неймана, если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

Решение. Найдем число Фробениуса для заданной модели Неймана с матрицами (A, B). Вычислим

$$det|A - \lambda B| = \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 2 - 2\lambda \\ 2 - 2\lambda & 1 - 3\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 3\lambda - 3 = 0,\ \lambda_1 \approx -2,19;\ \lambda_2 \approx 0,69.$$

По определению λ наибольшее и неотрицательное, следовательно, число Фробениуса рассматриваемой модели Неймана равно $0,69 < 1$. Заданная модель Неймана продуктивна. □

Пример 3.20. *Найти максимальный темп сбалансированного роста и луч Неймана, если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0,3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ p^0 = (12, 15),\ x^0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Решение. Максимальный темп сбалансированного роста определим по формуле

$$\overline{\lambda} = \frac{p^0 B x^0}{p^0 A x^0} - 1 = \frac{(12\ 15) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix}}{(12\ 15) \begin{pmatrix} 0,3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix}} - 1 = 0,13.$$

Луч Неймана задается соотношением

$$\overline{x}^t = (1 + \overline{\lambda})^t \overline{x}^0 = 1,13^t \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

□

4. Производственные функции

В данном разделе обсуждаются некоторые виды и свойства производственных функций. Особое внимание уделяется двухфакторным производственным функциям, разбору соответсвующих задач. Кроме того, рассмотрена модель Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа.

4.1. Основные понятия

Главной задачей любого предприятия является максимизация прибыли. Один из способов достижения этого – разумное сочетание факторов производства. Для решения этой проблемы в математической экономике строятся производственные функции, выявляющие математическую зависимость между используемыми факторами производства и объемом выпуска продукции.

Производственной функцией называется экономико-математическая модель, с помощью которой можно охарактеризовать зависимость результатов производственной деятельности предприятия, национальной экономики в целом от повлиявших на эти результаты факторов. Факторами производственной функции могут являться следующие переменные [10]:

1) объём выпущенной продукции (в стоимостном или натуральном выражении);

2) объём основного капитала или основных фондов;

3) объём трудовых ресурсов или трудовых затрат (измеряемое количеством рабочих или количеством человеко-дней);

4) затраты электроэнергии;

5) количество станков, используемых в производстве и др.

Самыми простыми производственными функциями являются однофакторные производственные функции. Например, объем производства y предприятия зависит от переменной x, которая может быть любым из вышеназванных факторов, например величиной затрат определённого ресурса. К однофакторным производственным функциям относятся:

1) линейная однофакторная производственная функция $y = k_0 + k_1 x,\ \ k_0, k_1 > 0$. Ограничения на k_0, k_1 имеют свое экономическое обоснование. Если величина факторной переменной x равна нулю, то объём производства нулевым не будет $y = k_0$, если же увеличиваются затраты фактора x, то и объем произведённой продукции y возрастает;

2) параболическая однофакторная производственная функция $y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2$, $k_0, k_1, k_2 > 0$. Данная функция характеризуется тем, что при росте затрат ресурса x объём произведённой продукции y сначала возрастает до некоторой максимальной величины, а затем снижается до нуля;

3) степенная однофакторная производственная функция $y = k_0 \cdot x^{k_1},\ \ k_0, k_1 > 0$. Данная функция характеризуется тем, что при росте затрат ресурса x, объём производства y возрастает без ограничений;

4) показательная однофакторная производственная функция $y = k_0 - k \cdot k_1^x$, $0 < k_1 < 1$. Данная функция характеризуется тем, что с ростом затрат ресурса x объём произведённой продукции y также растёт, стремясь при этом к значению параметра k_0;

5) гиперболическая однофакторная производственная функция $y = k_0 + \dfrac{k_1}{x}$. Данная функция практически не применяется при изучении зависимости объёма производства от затрат какого-либо ресурса, потому что нет необходимости в изучении ресурсов, увеличение которых приводит к уменьшению объёма производства.

Пример 4.1. *Издержки производства 100 шт. некоторого товара составляют 300 тыс. руб., а 500 шт. – 600 тыс. руб. Считая функцию издержек линейной, определите величину издержек в тыс. руб. для выпуска 400 шт. товара.*

Решение. Зададим линейную функцию издержек $C = aY + b$, где C – издержки производства, Y – объем выпуска, a, b – коэффициенты. По условию задачи

$$300 = 100a + b, 600 = 500a + b.$$

Определяем коэффициенты $a = \dfrac{3}{4}, b = 225$, функция издержек производства $C = \dfrac{3}{4}Y + 225$. Для выпуска 400 шт. товара потребуются издержки С $= \dfrac{3}{4} \cdot 400 + 225 = 525$ тыс. руб. □

4.2. Свойства производственных функций

Производством называется любая человеческая деятельность по преобразованию ограниченных ресурсов (материальных, трудовых, природных) в готовую продукцию.

Производственная функция характеризует зависимость между количеством используемых ресурсов (факторов производства) и максимально возможным объемом выпуска, который может быть достигнут при условии, что все имеющиеся ресурсы используются наиболее рациональным образом. С её помощью решают задачи прогнозирования экономического роста, оценки отдачи от ресурсов в производственном процессе, разработки планов развития производства и др.

Свойства производственной функции:

1) Существует предел увеличения производства, который может быть достигнут при увеличении одного ресурса и постоянстве прочих ресурсов. Если, например, в сельском хозяйстве увеличивать количество труда при постоянных количествах капитала и земли, то рано или поздно наступает момент, когда выпуск перестает расти.

2) Ресурсы дополняют друг друга, но в определенных пределах возможна и их взаимозаменяемость без сокращения выпуска. Ручной труд, например, может заменяться использованием большего количества машин, роботов, и, наоборот, работники нуждаются в станках и инструментах.

3) Чем длиннее временной период, тем большее количество ресурсов может быть пересмотрено. В этой связи различают мгновенный, короткий и длительный периоды. *Мгновенный период* – период, когда все ресурсы являются фиксированными. *Короткий период* – период, когда, по крайней мере, один ресурс является фиксированным. *Длительный период* – период, когда все ресурсы являются переменными.

Общий вид производственной функции: $y = f(x, k)$, где y – ожидаемый результат, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор ресурсов (x_i – количество i-го ресурса, использованного при производстве продукции), $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ – вектор параметров. Предполагается, что производственная функция должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой. Для функции $y = f(x, k)$ выполняются экономические предположения

1) если отсутствует один из производственных ресурсов, то производство невозможно:
$$y = f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n, k) = \ldots = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, 0, k) = 0;$$

2) рост использования ресурсов x приводит к росту результатов производства y:
$$\frac{\partial y}{\partial x_i} > 0 \text{ при } x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n;$$

3) увеличение затрат одного ресурса приводит к снижению эффективности его использования (закон убывающей эффективности):
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \leqslant 0,\ \text{при } x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n;$$

4) эффективность затрат любого из ресурсов при увеличении затрат какого-либо другого ресурса и неизменном количестве остальных не снижается:
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0, \text{при } x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

4.3. Двухфакторные производственные функции

При проведении микроэкономическкго анализа в основном используется двухфакторная производственная функция. Предполагается, что уровень организационно-технических знаний фиксирован, а все материальные факторы объединены в один фактор – капитал. Поэтому производственная функция включает в себя два фактора, от которых зависит выпуск продукции: труд L и капитал K. В общем виде она записывается следующим образом:
$$Q = f(K, L)$$
и характеризует зависимость между количеством применяемых ресурсов K, L и максимально возможным объемом выпуска продукции Q в единицу времени.

Анализ теории предельной производительности факторов требует рассмотрения таких понятий, как предельный и средний продукт переменного фактора производства.

Предельный продукт фактора производства – величина, характеризующая изменение объема выпуска продукции в результате использования дополнительной единицы какого-либо фактора производства при неизменном количестве остальных [4].

Предельная производительность труда вычисляется по формуле

$$v = \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \tag{4.1}$$

и *предельный продукт капитала* (предельная фондоотдача) – по формуле

$$r = \frac{\partial f(K, L)}{\partial K}. \tag{4.2}$$

Предельная норма технического замещения капитала трудом $s_{L,K}$ показывает, на какую величину следует изменить количество капитала при изменении количества труда, чтобы размеры выпуска не изменились:

$$s_{L,K} = \frac{v}{r}. \tag{4.3}$$

Величина $y = \dfrac{f(K, L)}{L}$ называется *средним продуктом труда* (производительностью труда).

Рассмотрим вопрос об изменении выпуска, если предприятие увеличивает использование всех факторов в λ раз, т. е. меняет масштаб производства.

При $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$ наблюдается *неизменная отдача от масштаба*, т. е. производительность труда не меняется.

При $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$ наблюдается *убывающая отдача от масштаба*, т. е. производительность труда снижается.

При $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$ наблюдается *возрастающая отдача от масштаба*, т. е. рост производительности труда.

Пример 4.2. *Двухфакторная производственная функция имеет вид* $Q = f(K, L) = 12K^{0,3}L^{0,5}$. *Найти выпуск* Q *при* $K = 4, L = 2$, *предельные продукты труда и капитала, предельную норму технического замещения капитала трудом. Что можно сказать об отдаче от масштаба?*

Решение. При $K = 4, L = 2$ выпуск $Q = f(4, 2) = 12 \times 4^{0,3} \times 2^{0,5} \approx 25, 72$. Предельный продукт труда (4.1) $v = \dfrac{\partial f(K, L)}{\partial L} = 12 \times 0, 5 \times K^{0,3}L^{0,5-1} = 6K^{0,3}L^{-0,5}$.
Предельный продукт капитала (4.2) $r = \dfrac{\partial f(K, L)}{\partial K} = 12 \times 0, 3 \times K^{0,3-1}L^{0,5} = 3, 6K^{-0,7}L^{0,5}$.
Предельная норма технического замещения капитала трудом (4.3) $s_{L,K} = \dfrac{v}{r} = \dfrac{6K^{0,3}L^{-0,5}}{3, 6K^{-0,7}L^{0,5}} \approx 1, 67\dfrac{K}{L}$.
Отдача от масштаба $f(\lambda K, \lambda L) = 12(\lambda K)^{0,3}(\lambda L)^{0,5} = \lambda^{0,8}12K^{0,3}L^{0,5} < \lambda f(K, L) = \lambda \times \times 12K^{0,3}L^{0,5}$, следовательно, наблюдается убывающая отдача от масштаба. □

Пример 4.3. *Производственная функция имеет вид* $Q = 25K^{1/3}L^{2/3}$. *Цены факторов равны соответственно 3 и 6. Фирма стремится максимизировать выпуск, но ее финансовые ресурсы ограничены 30 единицами. Чему будут равны затраты капитала и труда?*

Решение. Фирма стремится максимизировать выпуск, т. е. необходимо найти значения параметров, при которых Q максимально, с ограничениями на финансы $3K + 6L = 30$. Выписываем систему:

$$Q = 25K^{1/3}L^{2/3},$$

$$K + 2L = 15,$$

откуда $Q = 25(15-2L)^{1/3}L^{2/3}$, или $Q^3 = 25^3(15-2L)L^2$. Для нахождения максимума Q вычислим $\dfrac{dQ^3}{dL} = 93750(5L - L^2)$. Исключая случай $L = 0$, получаем искомые значения труда и капитала $L = 5,\ K = 5$. □

Пример 4.4. *Пусть функция полезности потребителя имеет вид* $U(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2$, *где 1 и 2 – два взаимозаменяемых товара. Пусть потребитель использует эти товары в количествах* $x_1 = 9, x_2 = 10$. *Найдите предельную норму замещения в этой точке. Допустим, потребление первого товара сократилось на 5 ед. Как должно измениться потребление второго товара, чтобы значение функции полезности не изменилось?*

Решение. Предельная норма замещения вычисляется по формуле

$$s_{12} = \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{2}{\sqrt{x_1}}.$$

Тогда в точке $(9, 10)$ предельная норма замещения $s_{12} = \dfrac{2}{3}$. Значение функции полезности $U(9, 10) = 22$. Обозначим через y потребление второго товара, соответствующее значению функции полезности $U = 22$, тогда $U(4, y) = 4 \cdot 2 + y = 22$, откуда $y = 14$. Потребление второго товара должно увеличиться на 4 ед. □

4.4. Технический прогресс

Технический прогресс – многогранное понятие. Это и совершенствование технологий, техники методов организации производства, повышение квалификации работников и т. п. Оно включает в себя все факторы, позволяющие усовершенствовать производственные процессы, продукты и повысить эффективность использования производственных ресурсов. Технический прогресс позволяет увеличить реальный объем выпуска при неизменных затратах труда и капитала или, наоборот, снизить эти затраты в процессе производства заданного объема выпуска.

В зависимости от характера влияния технического прогресса на производительность труда и капитала выделяют следующие его виды [4], [6]:

1) капиталоинтенсивный (трудосберегающий) – в результате использования новой техники и технологии при постоянном соотношении капитала и труда ($\dfrac{K}{L} = Const$) предельная норма замещения s_k снижается по абсолютной величине;

2) трудоинтенсивный (капиталосберегающий) – при неизменном соотношении затрат капитала и труда ($\dfrac{K}{L} = Const$) предельная норма технического замещения капитала трудом s_k повышается;

3) нейтральный – предельная норма замещения капитала трудом s_k остается неизменной при прежнем соотношении труда и капитала ($\frac{K}{L} = Const$).

Рассмотрим производственную функцию, учитывающую технический прогресс:

$$Q = A(t)f(K(t), L(t)).$$

Здесь параметр $A(t)$ характеризует изменения, вызванные техническим прогрессом (t – время), $K = K(t)$ – капитал и $L = L(t)$ – труд также являются функциями времени.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(A(t)f(K(t), L(t))) = \frac{d}{dt}(A(t))f(K(t), L(t)) + A(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\Big) =$$

$$= \frac{d}{dt}(A(t))\frac{A(t)}{A(t)}f(K(t), L(t)) + A(t)\frac{f(K(t), L(t))}{f(K(t), L(t))}\Big(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\Big),$$

или $\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(A(t))\frac{Q(t)}{A(t)} + \frac{Q(t)}{f(K(t), L(t))}\Big(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\Big)$. Далее разделим обе части уравнения на Q, имеем $\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + \frac{1}{f(K(t), L(t))}\Big(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\Big)$. После перегруппировки

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + \frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{f(K(t), L(t))}\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{L}{f(K(t), L(t))}\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

введем обозначения величин

$$G_Q = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt},\ G_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt},\ G_L = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt},\ G_A = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt},$$

которые характеризуют темпы прироста выпуска, капитала, трудовых ресурсов и темп технического прогресса в течение периода t соответственно. Получаем, что

$$G_Q = G_A + \frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{f(K(t), L(t))}G_K + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{L}{f(K(t), L(t))}G_L.$$

Коэффициент $\varepsilon_K = \frac{\partial f}{\partial K}\frac{K}{f(K(t), L(t))} = \frac{\partial (Af)}{\partial K}\frac{K}{Af(K(t), L(t))} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}$, показывающий относительное изменение выпуска при изменении затрат капитала на 1 %, назовем *коэффициентом эластичности выпуска по затратам капитала:*

$$\varepsilon_K = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K}. \tag{4.4}$$

Аналогично получаем *коэффициент эластичности выпуска по затратам трудовых ресурсов*, отражающий относительное изменение выпуска при изменении затрат трудовых ресурсов на 1 % $\varepsilon_L = \frac{\partial f}{\partial L}\frac{L}{f(K(t), L(t))} = \frac{\partial (Af)}{\partial L}\frac{L}{Af(K(t), L(t))} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}$,

$$\varepsilon_L = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L}. \tag{4.5}$$

Для определения доли влияния на прирост выпуска изменения количества ресурсов или технического прогресса удобно использовать уравнение

$$G_Q = G_A + \varepsilon_K G_K + \varepsilon_L G_L. \tag{4.6}$$

Пример 4.5. *Дана функция спроса на некоторый товар* $C = 8 - \frac{1}{2}P$*. При какой цене* P *коэффициент эластичности спроса по цене равен* $-\frac{1}{2}$*?*

Решение. Коэффициент эластичности спроса по цене вычислим по формуле $\varepsilon_P(C) = \frac{P}{C}\frac{\partial C}{\partial P}$, $\varepsilon_P(C) = -\frac{1}{2}\frac{P}{C}$. При $P = C$ выполняется условие $\varepsilon_P(C) = -\frac{1}{2}$. Так как $C = 8 - \frac{1}{2}P$, то $P = \frac{16}{3}$. □

Пример 4.6. *Рассчитать эластичность выпуска по труду и капиталу для производственной функции* $Q = K^{1/4}L^{3/4}$ *в точке* $K = 1, L = 2$*. Оценить эффект от масштаба производства.*

Решение. Эластичность выпуска по труду определяется формулой (4.5)

$$\varepsilon_L = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{K^{1/4}L^{3/4}} \cdot \frac{3}{4}K^{1/4}L^{-1/4} = \frac{3}{4}.$$

Эластичность выпуска по капиталу (4.4) – формулой

$$\varepsilon_K = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{K^{1/4}L^{3/4}} \cdot \frac{1}{4}K^{-3/4}L^{3/4} = \frac{1}{4}.$$

Эластичность выпуска по труду и капиталу для рассматриваемой производственной функции не зависит от точки производства. В данном случае наблюдается постоянная отдача от масштаба производства, поскольку

$$Q(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{1/4}(\lambda L)^{3/4} = \lambda K^{1/4}L^{3/4} = \lambda Q(K, L).$$

□

4.5. Производственная функция Кобба-Дугласа

При построении модели типа Неймана в исследовании экономических процессов достаточно трудно собрать необходимую статистику. Оказывается, что проще оперировать отчетными данными укрупненных экономических показателей: объемом основных фондов, численностью работников, стоимостью продукта и т. п. Для изучения таких связей была построена теория производственных функций, возникновение которой относят к 1928 г. С этим годом связан выход статьи американских ученых экономиста П. Дугласа и математика Д. Кобба “Теория производства”. Для анализа развития экономики США в 30-х годах прошлого века учёные предложили одну из наиболее известных разновидностей производственых функций, носящую название функции Кобба-Дугласа.

Производственная функция Кобба-Дугласа (Cobb-Douglas production function) – модель, показывающая зависимость объёма производства Q от создающих его факторов производства — труда L и капитала K.

Функция имеет следующий вид:

$$Y(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{4.7}$$

где Y – объём выпущенной продукции (в стоимостном или натуральном выражении), K – объём основного капитала или основных фондов, L – затраты труда (объём трудовых ресурсов или трудовых затрат, измеряемых количеством рабочих или количеством человеко-дней), $A, \alpha.\beta$ – числовые параметры производственной функции, задаваемые условиями $A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$.

Вычислим основные показатели производственной функции Кобба-Дугласа:

1) коэффициент эластичности производственной функции Кобба-Дугласа по факторной переменной капитала K рассчитывается по формуле (4.4)

$$\varepsilon_K = \frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{K}{AK^\alpha L^\beta} \cdot \alpha AK^{\alpha-1}L^\beta = \alpha.$$

Из расчетов видно, что коэффициент эластичности функции Кобба-Дугласа по затратам капитала равен числовому параметру α и не зависит от переменных К и L;

2) коэффициент эластичности производственной функции Кобба-Дугласа по факторной переменной затрат труда L (4.5)

$$\varepsilon_L = \frac{L}{Y}\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{K}{AK^\alpha L^\beta} \cdot \beta AK^{\alpha-1}L^{\beta-1} = \beta$$

также не зависит от затрат труда и капитала и равен числовому параметру β;

Коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала α и по затратам трудовых ресурсов β характеризуют "вклад" в увеличение выпуска, т. е. являются параметрами производственной функции Кобба-Дугласа;

3) коэффициент средней производительности труда производственной функции Кобба-Дугласа рассчитывается по формуле

$$AP_L = \frac{Y}{L} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} = AK^\alpha L^{\beta-1}.$$

4) коэффициент средней фондоотдачи производственной функции Кобба-Дугласа рассчитывается по формуле

$$AP_K = \frac{Y}{K} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{K} = AK^{\alpha-1}L^\beta.$$

5) коэффициент предельной производительности труда производственной функции Кобба-Дугласа находим по формуле (4.1)

$$v = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \beta AP_L.$$

Данный показатель характеризует величину эффекта от каждой дополнительной единицы затраченного труда. Он пропорционален показателю средней производительности труда, но всегда меньше его величины, т. к. $\beta < 1$;

6) коэффициент предельной фондоотдачи производственной функции Кобба-Дугласа (4.2) рассчитывается по формуле

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^\beta = \alpha AP_K.$$

Данный показатель характеризует величину эффекта от каждой дополнительной единицы основных фондов, использованной в производстве. Он пропорционален показателю средней производительности, но всегда меньше его величины, т. к. $\alpha < 1$;

7) коэффициент предельной нормы технического замещения факторных переменных (замены труда капиталом) производственной функции Кобба-Дугласа (4.3) находим по формуле
$$s_{L,K} = \frac{v}{r} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{AP_L}{AP_K} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}.$$
Данный показатель характеризует, на сколько единиц можно уменьшить объём используемого капитала при увеличении объёма трудовых затрат на единицу и фиксированном объёме выпуска продукции.

При снижении величины $\dfrac{\beta}{\alpha}$, с изменением коэффициентов α, β при постоянных L и K, величина $s_{L,K}$ убывает. Это – капиталоинтенсивный технический прогресс. Изменяя α, β так, чтобы величина $\dfrac{\beta}{\alpha}$ повышалась, мы добьемся роста $s_{L,K}$ и получим трудоинтенсивный технический прогресс. Если же предельная норма технического замещения капитала трудом $s_{L,K}$ не меняется (при тех же условиях, что и выше), наблюдается нейтральный технический прогресс.

Рассмотрим вопрос об изменении масштаба производства для функции Кобба-Дугласа. Для этого увеличим количество всех факторов в λ раз.
$$Y(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = A\lambda^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}Y(K, L).$$
Если $\alpha + \beta = 1$, то $Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda Y(K, L)$ и это неизменная отдача от масштаба.

Если $\alpha + \beta > 1$, то $Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta}Y(K, L) > \lambda Y(K, L)$ и это возрастающая отдача от масштаба.

Если $\alpha + \beta < 1$, то $Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta}Y(K, L) < \lambda Y(K, L)$ и это убывающая отдача от масштаба.

Пример 4.7. *Найти параметры функции Кобба-Дугласа, если отношение коэффициентов эластичности по труду и капиталу составляет 3. Значение функции* $Y(4, 4) = 8,08$ *в условиях постоянной отдачи от масштаба.*

Решение. Запишем производственную функцию Кобба-Дугласа $Y = (K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ при значениях капитала $K = 4$ и труда $L = 4$:
$$Y(4, 4) = A4^{\alpha}4^{\beta} = A \cdot 4^{\alpha+\beta} = 8,08.$$
Из условия задачи следует, что $\dfrac{\varepsilon_L}{\varepsilon_K} = \dfrac{\beta}{\alpha} = 3$ и для параметров функции справедливо $\alpha + \beta = 1$. Получаем, что $\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\beta = \dfrac{3}{4}$ и $A = \dfrac{8,08}{4} = 2,02$. □

Пример 4.8. *Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид* $Y(K, L) = 5K^{0,35}L^{0,45}$. *Найти выпуск* Y *при* $K = 10$, $L = 6$, *предельные продукты труда и капитала, предельную норму технического замещения капитала трудом, коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала и по затратам трудовых ресурсов. Что можно сказать об отдаче от масштаба?*

Решение. В рассматриваемой производственной функции Кобба-Дугласа параметры a $= 0,35,\ b = 0,45$. Найдем выпуск $Y(10,6) = 5 \cdot 10^{0,35} \cdot 6^{0,45} \approx 25,07$.
Предельный продукт труда $v = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} = 0,45 \cdot 5 \cdot 10^{0,35} \cdot 6^{-0,55} \approx 1,88$.
Предельный продукт капитала $r = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta} = 0,35 \cdot 5 \cdot 10^{-0,65} \cdot 6^{0,45} \approx 0,88$.
Предельная норма технического замещения капитала трудом $s_{L,K} = \dfrac{v}{r} = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L} = \dfrac{0,35}{0,45}\dfrac{K}{L} \approx 0,77\dfrac{K}{L}$. Коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала $a = 0,35$ и по затратам трудовых ресурсов $b = 0,45$. Поскольку $a + b = 0,35 + 0,45 = 0,8 < 1$, то наблюдается убывающая отдача от масштаба. □

Пример 4.9. *Дана производная функция $Y(x_1, x_2) = 2,3x_1^{0,4}x_2^{0,6}$, где Y – объем товарной продукции в стоимостном выражении, x_1 – фонд заработной платы, x_2 – стоимость основных фондов. Произошло изменение используемых ресурсов: фонд заработной платы уменьшился на 3 %, стоимость основных фондов возросла на 2 %. На сколько процентов при этом изменится объем товарной продукции, производительность труда и фондоотдача?*

Решение. Определим изменение объема товарной продукции в процентном выражении. Прологарифмируем производственную функцию:

$$\ln Y = \ln(2,3) + 0,4 \ln x_1 + 0,6 \ln x_2.$$

Вычислим полный дифференциал данного выражения:

$$\frac{dY}{Y} = 0,4\frac{dx_1}{x_1} + 0,6\frac{dx_2}{x_2}.$$

Величины $\dfrac{dx_1}{x_1}$ и $\dfrac{dx_2}{x_2}$ выражают процентные изменения переменных x_1 и x_2. По условию задачи они равны -0,03 и 0,02 соответственно. Величина $\dfrac{dY}{Y}$ будет выражать процентное изменение переменной Y, т. е.

$$\frac{dY}{Y} = 0,4 \cdot (-0,03) + 0,6 \cdot (0,02) = 0.$$

При заданных условиях объем товарной продукции не изменился.

Производительность труда – это отношение объема товарной продукции к фонду заработной платы $\dfrac{Y}{x_1}$. Первоночально она составляла 100 % или $\dfrac{Y_{\text{исх}}}{x_{1\text{исх}}}$. Новая производительность труда будет равна $\dfrac{Y_{\text{нов}}}{x_{1\text{нов}}} = \dfrac{Y_{\text{исх}}}{0,97x_{1\text{исх}}}$. Из пропорции

$$\frac{Y_{\text{исх}}}{x_{1\text{исх}}} - 100\,\%,$$

$$\frac{Y_{\text{исх}}}{0,97x_{1\text{исх}}} - D\,\%$$

получаем $D = \dfrac{1}{0,97}100\,\% = 103\,\%$. Произошло повышение производительности труда на 3 %.

Фондоотдача является отношением объема товарной продукции к стоимости основных фондов $\frac{Y}{x_2}$. Она была равна $\frac{Y_{\text{исх}}}{x_{2\text{исх}}}$, и это составляло 100 %. При изменении x_1 и x_2 новая производительность труда будет равна $\frac{Y_{\text{нов}}}{x_{2\text{нов}}} = \frac{Y_{\text{исх}}}{1,02x_{2\text{исх}}}$. Составим пропорцию

$$\frac{Y_{\text{исх}}}{x_{2\text{исх}}} - 100\,\%,$$

$$\frac{Y_{\text{исх}}}{1,02x_{2\text{исх}}} - E\,\%,$$

откуда $E = \frac{1}{1,02}100\,\% = 98\,\%$. Так как $E = 98\,\%$, то произошло уменьшение фондоотдачи на 2 %. □

4.6. Модель Солоу

4.6.1. Параметры модели

Неоклассическая модель роста была разработана Робертом Солоу и впервые представлена в его статье "Вклад в теорию экономического роста" в 1956 году. Модель Солоу была создана для оценки роста экономики и описывала рост потоков и запасов товаров через устойчивое и естественным образом поддерживаемое движение к равновесию.

Цель модели Солоу ответить на три важных вопроса экономической политики: как добиться высоких и стабильных темпов роста, как одновременно с этим найти максимальный объем потребления и какое влияние на экономический рост оказывает увеличение населения и внедрение новых технологий?

Данная модель получила большую известность, она включена во все современные учебники по макроэкономике, а ее автор получил в 1987 году Нобелевскую премию по экономике "за фундаментальные исследования в области теории экономического роста" [12].

Модель Солоу – это односекторная макроэкономическая модель экономического роста. Экономическая система при этом производит один продукт, который как потребляется, так и инвестируется. Экспорт и импорт не учитываются. Модель позволяет довольно точно описать некоторые особенности макроэкономических процессов.

Состояние экономики в модели Солоу задается пятью эндогенными переменными, которые со временем меняются: K – капитал (основные производственные фонды), L – труд (трудовые ресурсы), Y – конечный продукт (выпуск или валовый внутренний продукт), I – инвестиции, C – размер непроизводственного потребления. Считаем, что ресурсы K и L используются полностью.

Производственная функция всей национальной экономики $Y = F(K, L)$. Конечный продукт Y используется на непроизводственное потребление C и инвестиции I, т. е. $Y = C + I$.

В модели используются следующие экзогенные показатели, которые со временем остаются неизменными: ρ – норма накопления, то есть доля конечного продукта, используемого на инвестиции $(0 < \rho < 1)$

$$I = \rho Y,\ C = Y - I = Y - \rho Y = (1 - \rho)Y.$$

Инвестиции расходуются на восстановление выбывших фондов и на их прирост. Пусть μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, то есть норма выбытия капитала $0 < \mu < 1$. Тогда $\dfrac{dK}{dt} = \rho Y - \mu K$. В начальный момент времени $t = 0 \quad K(0) = K_0$.

Также считаем, что прирост трудовых ресурсов (численность занятых) L растет с постоянным темпом ν, то есть $L = L_0 \exp(\nu t)$.

Модель Солоу в абсолютных показателях можно описать системой уравнений [11]:

$$\begin{cases} C = (1-\rho)Y, \\ Y = F(K, L), \\ L = L_0 \exp(\nu t), \\ \dfrac{dK}{dt} = \rho Y - \mu K, \ K(0) = K_0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Считаем, что мы находимся в ситуации неизменной отдачи от масштаба $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$.

Модель Солоу (4.8) можно записать и в относительных показателях, нормировав все уравнения системы трудом L и обозначив через $y = \dfrac{Y}{L}$ – среднюю производительность труда, $k = \dfrac{K}{L}$ – среднюю фондовооруженность. Тогда $y = \dfrac{F(K,L)}{L} = F(\dfrac{K}{L}, \dfrac{L}{L}) = F(k, 1) = f(k)$.

Вычислим производную $\dfrac{dk}{dt} = \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{K}{L}\Big) = \dfrac{L\dfrac{dK}{dt} - K\dfrac{dL}{dt}}{L^2} = \dfrac{L(\rho Y - \mu K) - K\nu L}{L^2} = \rho y - \mu k - \nu k = \rho f(k) - (\mu + \nu)k$ и $k(0) = \dfrac{K(0)}{L(0)} = \dfrac{K_0}{L_0}$. Это дифференциалное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

Все показатели модели Солоу определяются уравнениями:

$$\begin{gathered} \frac{dk}{dt} = \rho f(k) - (\mu + \nu)k, \\ k(0) = \frac{K_0}{L_0}, \\ L = L_0 \exp(\nu t). \end{gathered} \tag{4.9}$$

4.6.2. Модель Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа

Стационарная траектория модели Солоу – это траектория, на которой фондовооруженность k постоянна и равна своему начальному значению $k(t) = k_0$. Вычислим значения показателей модели на стационарной траектории.

$$\frac{dk}{dt} = \rho f(k) - (\mu + \nu)k = 0,$$

или $\rho f(k) = (\mu+\nu)k$. Из равенства $k = \dfrac{K(t)}{L(t)}$ следует, что $K(t) = kL(t) = k_0 L_0 \exp(\nu t)$. Так как $y = \dfrac{Y(t)}{L(t)} = f(k)$, то $Y(t) = f(k)L(t) = f(k_0)L_0 \exp(\nu t)$. Тогда $C(t) = (1 - \rho)f(k_0)L_0 \exp(\nu t)$ и $I(t) = \rho Y(t) = \rho f(k_0) L_0 \exp(\nu t)$.

На стационарной траектории все основные макропоказатели модели Солоу растут экспоненциально, пропорционально трудовым ресурсам.

Модель Роберта Солоу была построена на неоклассической предпосылке господства совершенной конкуренции на рынках факторов производства, обеспечивающей полную занятость ресурсов. Ученый исходил из того, что необходимым условием является равенство совокупного спроса и совокупного предложения. При этом совокупное предложение в его модели определялось на основании производственной функции Кобба-Дугласа, выражающей отношение функциональной зависимости между объемом производства, с одной стороны, и используемыми факторами и их взаимной комбинацией – с другой. Общий вид такой модели: $Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, или $f(k) = F(k, 1) = Ak^{\alpha}1^{\beta} = Ak^{\alpha}$.

Уравнение $\dfrac{dk}{dt} = \rho f(k) - (\mu + \nu)k$ перепишется в виде $\dfrac{dk}{dt} = \rho Ak^{\alpha} - (\mu + \nu)k$. Стандартные вычисления позволяют получить (подробнее см. [4]) стационарное значение фондовооруженности для производственной функции Кобба-Дугласа

$$k_0 = \Big(\frac{\rho A}{\mu + \nu}\Big)^{\dfrac{1}{1 - \alpha}}. \tag{4.10}$$

Также можно определить, что производительность труда сходится к стационарному значению $y_0 = A\Big(\dfrac{\rho A}{\mu + \nu}\Big)^{\dfrac{\alpha}{1 - \alpha}}$, удельное потребление на одного работника

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{L(t)} = (1 - \rho)A\Big(\frac{\rho A}{\mu + \nu}\Big)^{\dfrac{\alpha}{1 - \alpha}}$$

и при значении нормы накопления $\rho = \alpha$ удельное потребление в стационарном режиме максимально.

Данное правило называется *"золотым правилом экономического роста"*: для производственной функции Кобба-Дугласа оптимальная норма накопления ρ в стационарном режиме равна коэффициенту эластичности α по капиталу.

Пример 4.10. *Рассматривается модель Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа, значения параметров которой $A = 10^3$, $\alpha = 0,5$. Требуется рассчитать значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, если норма накопления равна $\rho = 0,2$; коэффициент выбытия за год основных производственных фондов составляет $\mu = 0,2$; а годовой темп прироста численности занятых равен $\nu = 0,05$.*

Решение. На стационарной траектории фондовооруженность $k_0 = \Big(\dfrac{\rho A}{\mu + \nu}\Big)^{\dfrac{1}{1 - \alpha}} =$ $= \Big(\dfrac{0,2 \times 10^3}{0,2 + 0,05}\Big)^{\dfrac{1}{1 - 0,5}} = 64 \times 10^4$. Стационарное значение производительности труда $y_0 = Ak_0^{\alpha} = 10^3 \times (64 \times 10^4)^{0,5} = 8 \times 10^5$, удельное потребление на стационарной траектории равно $(1 - \rho)y_0 = (1 - 0,2) \times 8 \times 10^5 = 64 \times 10^4$. $\square$

Заключение

Решение прикладных экономических задач оптимизационного характера осуществляется по следующей общей схеме [13]:

1) излагается сущность решаемой задачи в словесной форме: описывается анализируемая система или процесс; выделяются факторы и параметры, которые можно считать известными (заданными); перечисляются переменные, на которые накладываются ограничения; указываются показатели, которые необходимо минимизировать или сделать как можно больше.

   Этот этап во многом предопределяет выбор метода решения и получаемый результат.Для одной и той же системы при разных показателях, принятых в качестве критерия оптимальности, могут быть получены совершенно разные оптимальные управления;

2) выполняется формализация поставленной задачи, т. е. получение математической модели;

3) проводится анализ этой модели и отнесение ее к соответствующему типу классических задач;

4) осуществляется выбор соответствующего этому классу задач метода решения и получение последовательности (блок-схемы) расчетных соотношений;

5) составляется программа, реализующая вычисления по этой блок-схеме и расчетным соотношениям;

6) проводятся вычисления для заданных исходных условий;

7) осуществляется интерпретация полученных результатов.

Анализ результатов иногда показывает на необходимость пересмотра или уточнения исходных условий либо на целесообразность использования полученной вычислительной схемы или программы для исследования чувствительности решения к изменению тех или иных параметров. Не существует универсального алгоритма, позволяющего решать любые оптимизационные задачи, поэтому для каждого класса задач (линейного программирования, транспортных задач, сетевого планирования, динамического программирования и т. д.) разработан свой специфический алгоритм решения. При этом существуют приемы, позволяющие задачу одного типа сводить к задаче другого типа, например, транспортные или сетевые задачи рассматривать как задачи линейного программирования и как задачи динамического программирования; задачи математического программирования рассматривать как задачи безусловной оптимизации. Это дает возможность для выбора наиболее удобного и эффективного подхода к решению в тех или иных условиях, например, в зависимости от имеющегося в наличии программного обеспечения.

Литература

1. *Заславский, Ю. Л.* Сборник задач по линейному программированию / Ю. Л. Заславский. – М. : Наука, 1969. – 256 с.

2. *Юдин, Д. Б.* Задачи и методы линейного программирования / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Советское радио, 1961. – 494 с.

3. *Кузнецов, Б. Т.* Математика / Б. Т. Кузнецов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с.

4. *Просветов, Г. И.* Управленческий учет: Задачи и решения: учебно-методическое пособие / Г. И. Просветов. – М. : Изд-во РДЛ, 2006. – 272 с.

5. *Ревякин, А. М.* Математические методы моделирования в экономике: учеб. пособие /А. М. Ревякин, И. В. Бардушкина. – М. : МИЭТ, 2013. – 328 с.: ил.

6. *Ашманов, С. А.* Математические модели и методы в экономике / С. А. Ашманов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 199 с.

7. *Интрилигатор, М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория /М. Интрилигатор. – М. : Айрис-Пресс, 2002. – 553 с.

8. *Кузнецов, Б. Т.* Макроэкономика: учеб. пособие / Б. Т. Кузнецов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 458 с.

9. *Агапова, Т. А.* Макроэкономика / Т. А. Агапова. – М. : ДиС, 1997. – 415 с.

10. *Яковлева, А. В.* Эконометрика: конспект лекций /А. В. Яковлева. – М. : ЭКСМО, 2008. – 244 с.

11. *Колемаев, В. А.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005 – 295 с.

12. *Solow, R. M.* Technical Change and the Aggregate Production Function / R. M. Solow // The Review of Economics and Statistics. – 1957. – Vol. 39, No. 3. – P. 312–320.

13. *Галкин, А. А.* Математическая экономика : учебник / А. А. Галкин. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 304 с.

Учебное издание

Алешин Сергей Владимирович
Толбей Анна Олеговна

Математические модели в экономике

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор, верстка А. О. Толбей

Подписано в печать 28.05.2019. Формат 60×84/8.
Усл. печ. л. 7,9. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 22 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.